Lineare Systeme von Differentialgleichungen

Unter einem *linearen System von Differentialgleichungen* versteht man die n Differentialgleichungen

$$
\begin{aligned}
y_1'(x) &= a_{11}(x)y_1(x) + \ldots + a_{1n}(x)y_n(x) + b_1(x), \\
\vdots \quad & \quad \vdots \\
y_n'(x) &= a_{n1}(x)y_1(x) + \ldots + a_{nn}(x)y_n(x) + b_n(x).
\end{aligned}
$$

Dabei sind a_{jk} und b_j *stetige*, auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ definierte Funktionen. Im Fall $b_1 = \ldots = b_n \equiv 0$ spricht man von einem *homogenen* System. Ein *Anfangswertproblem* liegt vor, wenn für gegebene $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ die folgenden Gleichungen gefordert werden:

$$y_j(x_0) = a_j, \qquad j = 1, \ldots, n.$$

Lösungsmengen linearer Systeme

Satz: *Die Menge aller Lösungen $\vec{y}$ eines homogenen linearen Systems von n Differentialgleichungen bildet einen n-dimensionalen Vektorraum.*

Satz: *Gegeben sei ein lineares Systems von Differentialgleichungen. Es sei $\vec{y}_p$ eine Lösung. Dann ist jede andere Lösung $\vec{y}$ von der Form*

$$\vec{y} = \vec{y}_p + \vec{y}_h$$

mit einer Lösung $\vec{y}_h$ des zugehörigen homogenen Systems.

Bemerkung: Steht eine Basis des homogenen Systems zur Verfügung, so kann das Prinzip der Variation der Konstanten benutzt werden, um eine Lösung des inhomogenen Systems zu finden.

Lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten

Hängen die Koeffizientenfunktionen $a_{jl}(x)$ eines linearen System von Differentialgleichungen nicht von $x \in I$ ab, so so spricht man von einem System mit *konstanten Koeffizienten*. Man schreibt es in der Form

$$\vec{y}\,'(x) = A\vec{y} + \vec{b}(x).$$

Dabei ist A die $n \times n$-Matrix mit den Einträgen a_{jl} und $\vec{b}(x)$ der als Spaltenvektor interpretierte Vektor $(b_1(x), \ldots, b_n(x))$.

Satz: *Man betrachte das homogene System*

$$\vec{y}\,'(x) = A\vec{y}.$$

Es sei λ ein reeller Eigenwert von A und es seien $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m$ linear unabhängige Eigenvektoren zum Eigenwert λ. Dann sind

$$e^{\lambda x}\vec{v}_1, \ldots, e^{\lambda x}\vec{v}_m$$

linear unabhängige Lösungen.

Satz: *Man betrachte das komogene System* $\vec{y}\,'(x) = A\vec{y}$*. Es sei* λ *ein reeller Eigenwert von* A *mit der Vielfachheit* k*. Ferner sei* $\vec{v}$ *ein Eigenvektor zu* λ*. Dann gibt es ein* $m \in \mathbb{N}_0$ *mit* $m \leq k$ *sowie Vektoren* $\vec{v}_{jl} \in \mathbb{R}^n$ $(j = 0, \ldots, m-1,\ l = 0, \ldots, j-1)$ *mit* $\vec{v}_{jj} = \vec{v}$ *für jedes* $j = 0, \ldots, m-1$*, so dass das System* m *linear unabhängige Lösungen von der Form*

$$\begin{aligned}
\vec{y}_0(x) &= e^{\lambda x}\vec{v}_{0,0}, \\
\vec{y}_1(x) &= e^{\lambda x}(\vec{v}_{1,0} + x\vec{v}_{1,1}), \\
\vdots \quad & \quad \vdots \\
\vec{y}_{m-1}(x) &= e^{\lambda x}(\vec{v}_{m-1,0} + x\vec{v}_{m-1,1} + \ldots + x^{m-1}\vec{v}_{m-1,m-1})
\end{aligned}$$

hat. Hat der Eigenraum von A *zu* λ *die Dimension* 1*, so ist* $m = k$*.*

Satz: *Es sei $\lambda = \alpha + i\beta$ ein komplexer Eigenwert von A mit der Vielfachheit k und zugehörigem Eigenvektor $\vec{v}+i\vec{w}$. Dann gibt es ein $m \in \mathbb{N}_0$ mit $m \le k$ sowie Vektoren $\vec{v}_{jl}, \vec{w}_{jl} \in \mathbb{R}^n$ $(j = 0, \ldots, m-1,$ $l = 0, \ldots, j-1)$ mit $(\vec{v}_{jj}, \vec{w}_{jj}) = (\vec{v}, \vec{w})$ für jedes $j = 0, \ldots, m-1$, so dass das System $\vec{y}\,'(x) = A\vec{y}$ die folgenden $2m$ linear unabhängigen Lösungen hat:*

$$\begin{aligned}
\vec{y}_0(x) =& e^{\alpha x}(\cos(\beta x)\vec{v}_{0,0} - \sin(\beta x)\vec{w}_{0,0}),\\
\vec{y}_1(x) =& e^{\alpha x}(\cos(\beta x)\vec{v}_{1,0} - \sin(\beta x)\vec{w}_{1,0})\\
&+ xe^{\alpha x}(\cos(\beta x)\vec{v}_{1,1} - \sin(\beta x)\vec{w}_{1,1}),\\
&\vdots\\
\vec{y}_{m-1}(x) =& e^{\alpha x}(\cos(\beta x)\vec{v}_{m-1,0} - \sin(\beta x)\vec{w}_{m-1,0})\\
&+ xe^{\alpha x}(\cos(\beta x)\vec{v}_{m-1,1} - \sin(\beta x)\vec{w}_{m-1,1}) + \ldots\\
&+ x^{m-1}e^{\alpha x}(\cos(\beta x)\vec{v}_{m-1,m-1} - \sin(\beta x)\vec{w}_{m-1,m-1}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{z}_0(x) =& e^{\alpha x}(\sin(\beta x)\vec{v}_{0,0} + \cos(\beta x)\vec{w}_{0,0}),\\
\vec{z}_1(x) =& e^{\alpha x}(\sin(\beta x)\vec{v}_{1,0} + \cos(\beta x)\vec{w}_{1,0})\\
&+ xe^{\alpha x}(\sin(\beta x)\vec{v}_{1,1} + \cos(\beta x)\vec{w}_{1,1}),\\
&\vdots\\
\vec{z}_{m-1}(x) =& e^{\alpha x}(\sin(\beta x)\vec{v}_{m-1,0} + \cos(\beta x)\vec{w}_{m-1,0})\\
&+ xe^{\alpha x}(\sin(\beta x)\vec{v}_{k-1,1} + \cos(\beta x)\vec{w}_{k-1,1}) + \ldots\\
&+ x^{m-1}e^{\alpha x}(\sin(\beta x)\vec{v}_{m-1,m-1} + \cos(\beta x)\vec{w}_{m-1,m-1}).
\end{aligned}$$

Hat der (komplexe) Eigenraum von A zu λ die Dimension 1, so ist $m = k$.

Bemerkung: Die letzten beiden Sätze liefern eine Basis der Lösungsmenge des homogenen Systems

$$\vec{y}'(x) = A\vec{y}.$$

Dazu wählt man zu jedem Eigenwert von A eine Basis des zugehörigen Eigenraums. Für jeden so erhaltenen Eigenvektor wendet man einen der Sätze an. Von jedem Paar konjugiert komplexer Eigenwerte von A darf jeweils nur ein Eigenwert berücksichtigt werden.