

Optimierungstheorie (Sommer 2012)

11. Übungsblatt vom 29. Juni 2012

Aufgabe 35: (4 Punkte)

Formulieren Sie zu dem konvexen Optimierungsproblem

$$(P) \quad \text{Minimiere } x_1^2 + x_2 \quad \text{auf} \quad M = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1\}$$

das duale Problem und lösen Sie beide.

Aufgabe 36: (4 Punkte)

Betrachten Sie das Optimierungsproblem

$$(P) \quad \text{Minimiere } e^{-x_1} \quad \text{unter} \quad \frac{x_1^2}{x_2} \leq 0, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in K = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x_2 > 0 \right\}.$$

- Zeigen Sie, dass (P) ein konvexes Optimierungsproblem ist und lösen Sie es.
- Bestimmen Sie das duale Problem (D) von (P) und berechnen Sie die Lösung von (D).
- Tritt eine Dualitätslücke auf, d.h. ist $\max(D) < \min(P)$?

Aufgabe 37: (4 Punkte)

Betrachten Sie zu einer symmetrischen, positiv definiten Matrix $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$, sowie $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $c \in \mathbb{R}^n$ und $b \in \mathbb{R}^m$ die beiden quadratischen Optimierungsaufgaben

$$(P1) \quad \text{Minimiere } \frac{1}{2} x^T Q x + c^T x \quad \text{über} \quad M = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\},$$

$$(P2) \quad \text{Minimiere } \frac{1}{2} y^T A Q^{-1} A^T y + (b + A Q^{-1} c)^T y \quad \text{über} \quad N = \{y \in \mathbb{R}^m : y \geq 0\}.$$

Zeigen Sie:

- (P1) ist eindeutig durch ein $x^* \in M$ lösbar, falls M nichtleer ist.
- Das quadratische Problem (P2) ist äquivalent zum dualen Problem von (P1). Stellen Sie dazu das duale Problem von (P1) auf.

Aufgabe 38: (2 Punkte)

Es sei $K \subset \mathbb{R}^n$ konvex, $f: K \rightarrow \mathbb{R}$, $g: K \rightarrow \mathbb{R}^p$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $b \in \mathbb{R}^m$. Mit $L: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ bezeichnen wir die Lagrange-Funktion

$$L(x, u, v) = f(x) + u^T g(x) + v^T (Ax - b).$$

und ferner sei $F: \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $F(u, v) = \inf_{x \in K} L(x, u, v)$.

Zeigen Sie, dass die Funktion $F(u, v)$ konkav ist (d.h. $-F(u, v)$ ist konvex).

Werfen Sie Ihre Lösungen bis zum **Freitag, den 06. Juli 2012, 13.30 Uhr** in den mit „Optimierungstheorie“ gekennzeichneten grünen Abgabekasten im 1. OG des C-Teils des Allianz-Gebäudes ein oder geben Sie sie zu Beginn der Übung beim Übungsleiter ab. Schreiben Sie bitte auf **jedes** Ihrer Blätter Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.