Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Angewandte und Numerische Mathematik
JProf. Dr. Tobias Jahnke, Dipl.-Math. techn. Andreas Arnold, Dipl.-Math. techn. Tim Kreutzmann

Numerische Methoden für Differentialgleichungen

Wintersemester 2011/2012

7. Übungsblatt

Besprechung in den Übungen am 1. und 6. 12. 2011

Aufgabe 1: (Eingebettete Verfahren)
Gegeben sei das Verfahren von Kutta mit dem Butcher-Schema

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & & & & \\ 1/2 & 1/2 & & & \\ 1/2 & 0 & 1/2 & & \\ 1 & 0 & 0 & 1 & \\ \hline & 1/6 & 1/3 & 1/3 & 1/6 \end{array}$$

Berechnen Sie die Verfahrenskonstanten $\hat{b}_i, i = 1, \ldots, 4$ eines eingebetteten Verfahrens der Ordnung 3. Warum eignet sich dieses Verfahren nicht zur Schätzung des Fehlers?

Aufgabe 2: (Fehlberg-Trick)
Die Ergebnisse aus Aufgabe 1 zeigen: Um für das Verfahren von Kutta einen Fehlerschätzer der Ordnung 3 zu erhalten, ist das Hinzufügen einer weiteren Stufe erforderlich

$$\begin{array}{c|ccccc} 0 & & & & & \\ 1/2 & 1/2 & & & & \\ 1/2 & 0 & 1/2 & & & \\ 1 & 0 & 0 & 1 & & \\ c_5 & a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & \\ \hline & 1/6 & 1/3 & 1/3 & 1/6 & 0 \\ \hline & \hat{b}_1 & \hat{b}_2 & \hat{b}_3 & \hat{b}_4 & \hat{b}_5 \end{array} \tag{1}$$

Um den Gesamtaufwand geschickt zu kompensieren, hatte Erwin Fehlberg die Idee, die letzte Stufe Y_s eines s-stufigen Verfahrens als f-Auswertung dadurch *effektiv* einzusparen, indem sie identisch mit der ersten Stufe Y_1^* des nächsten Schrittes ist, also

$$Y_s = y_n + h \sum_{j=1}^{s} a_{sj} f(t_n + c_j h, Y_j) \stackrel{!}{=} y_{n+1} + h \sum_{j=1}^{s} a_{1j} f(t_{n+1} + c_j h, Y_j^*) = Y_1^* \tag{2}$$

mit

$$Y_i = y_n + h \sum_{j=1}^{s} a_{ij} f(t_n + c_j h, Y_j) \quad , \quad Y_i^* = y_{n+1} + h \sum_{j=1}^{s} a_{ij} f(t_{n+1} + c_j h, Y_j^*)$$

für $i = 1, \ldots, s$ und $y_{n+1} = y_n + h \sum_{i=1}^{s} b_i f(t_n + c_i h, Y_i)$.

(a) Was muss aufgrund von (2) für die Verfahrenskoeffizienten $c_s,\ a_{sj},\ j = 1, \ldots, s-1$ eines expliziten und konsistenten Verfahrens gelten?

(b) Bestimmen Sie eine mögliche Wahl an Verfahrenskoeffizienten

$$\hat{b}_1\ ,\ \hat{b}_2\ ,\ \hat{b}_3\ ,\ \hat{b}_4\ ,\ \hat{b}_5$$

aus (1), so dass das eingebettete Verfahren die maximale Ordnung 3 besitzt.
Hinweis: Ein Runge-Kutta-Verfahren hat genau dann die Konsitenzordnung $p = 4$, falls die Bedingungsgleichungen für $p = 1, 2, 3$ erfüllt sind und zusätzlich gilt:

$$\sum_{i=1}^{s} b_i c_i^3 = 1/4 \tag{3}$$

$$\sum_{i=1}^{s} b_i c_i \sum_{j=1}^{s} a_{ij} c_j = 1/8 \tag{4}$$

$$\sum_{i=1}^{s} b_i \sum_{j=1}^{s} a_{ij} c_j^2 = 1/12 \tag{5}$$

$$\sum_{i=1}^{s} b_i \sum_{j=1}^{s} a_{ij} \sum_{k=1}^{s} a_{jk} c_k = 1/24 \tag{6}$$

Aufgabe 3:
Wir betrachten die Drei-Term-Rekursion

$$x_{k+1} = 10x_k - 9x_{k-1}, \quad k \in \mathbb{N},$$

mit den Startwerten $x_1 = 1 + \varepsilon_1$ und $x_0 = 1$. Dabei stellen wir uns vor, dass ε_1 ein kleiner Fehler (z. B. Messfehler, Rundungsfehler, Datenfehler usw.) ist, der den eigentlichen Startwert verfälscht.

(a) Berechnen Sie $x_k, k \in \mathbb{N}$, unter der Annahme, dass $\varepsilon_1 = 0$.

(b) Schreiben Sie ein Programm, das mit einer `for`-Schleife die Werte $x_2, x_3, \ldots, x_{10}$ berechnet und plottet. Wählen Sie für $\varepsilon_1 = 0.0001$. Welche Auswirkung hat der kleine Fehler ε_1?

(c) Wir setzen

$$\varepsilon_k = x_k - 1, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Leiten Sie eine Formel der Form $\varepsilon_k = (\ldots) \cdot \varepsilon_1$ her.