Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Angewandte und Numerische Mathematik
JProf. Dr. Tobias Jahnke, Dipl.-Math. techn. Andreas Arnold, Dipl.-Math. techn. Tim Kreutzmann

Numerische Methoden für Differentialgleichungen

Wintersemester 2011/2012

6. Übungsblatt

Besprechung in den Übungen am 24. und 29. 11. 2011

Aufgabe 1:
Wählen Sie eine Quadraturformel mit 2 Stützstellen c_1 und c_2 und bestimmen Sie das Butcher-Schema von maximaler Konsistenzordnung

$$\begin{array}{c|c} c & A \\ \hline & b^T \end{array}$$

des zugehörigen Kollokationsverfahrens.

Aufgabe 2:
Zeigen Sie:

(a) Die Koeffizienten eines durch Kollokation definierten impliziten Runge-Kutta-Verfahrens erfüllen für $0 \le c_1 < \cdots < c_s \le 1$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{s} b_j c_j^{k-1} &= \frac{1}{k} \quad, \; k = 1, \ldots, s \qquad (1) \\ \sum_{j=1}^{s} a_{ij} c_j^{k-1} &= \frac{c_i^k}{k} \quad, \; i, k = 1, \ldots, s. \end{aligned}$$

(b) Insbesondere ist dieses Runge-Kutta-Verfahren invariant gegen Autonomisierung.

(c) Die Eigenschaft (1) bedeutet, dass die Quadraturformel

$$\sum_{j=1}^{s} b_j P(c_j) \approx \int_0^1 P(t)dt$$

exakt ist für Polynome P vom Grad $\le s - 1$.

(d) Die Matrix $A = (a_{ij})$ ist genau dann invertierbar, wenn das Produkt der Stützstellen die Beziehung $\prod_{j=1}^{s} c_j \neq 0$ erfüllt.

Aufgabe 3: (Programmieraufgabe)
Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned}\dot{u}(t) &= u(t)\,(1-u(t)) - \frac{au(t)v(t)}{u(t)+d},\\ \dot{v}(t) &= bv(t)\left(1-\frac{v(t)}{u(t)}\right),\end{aligned}$$

$$t \in [0,100] \quad , \quad u(0) = 1.2 \quad , \quad v(0) = 0.5,$$

mit den Parametern

$$a = 1 \quad , \quad b = 0.1 \quad , \quad d = 0.1.$$

Das Differentialgleichungssystem modelliert ein Räuber-Beute Szenario, in welchem die Variable u die Populationsgröße der Beute beschreibt und v die des Räubers.

(a) Implementieren Sie ein Programm, welches die Lösung für verschiedene Schrittweiten $h = \frac{100}{N}$ durch

  (i) das explizite Euler-Verfahren

  (ii) das implizite Euler-Verfahren

  (iii) die Mittelpunktsregel

approximiert.
Hinweis: Zur Lösung eines nichtlinearen Gleichungssystems in Matlab eignet sich der Befehl *fsolve*. Nähere Informationen sind in Matlab mit den Befehlen

```
help fsolve
```

und

```
doc fsolve
```

abrufbar.

(b) Plotten Sie die numerischen Lösungen aus (a) zu den Schrittweiten

$$h = 2\ ,\ 1\ ,\ \frac{1}{5}.$$