Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Angewandte und Numerische Mathematik
JProf. Dr. Tobias Jahnke, Dipl.-Math. techn. Andreas Arnold, Dipl.-Math. techn. Tim Kreutzmann

Numerische Methoden für Differentialgleichungen

Wintersemester 2011/2012

14. Übungsblatt

Besprechung in den Übungen am 2. und 7. 2. 2012

Aufgabe 1:

(a) Zeigen Sie, dass

$$u(t,x) = F(x+ct) + G(x-ct)$$

für $F, G \in C^2(\mathbb{R})$ eine Lösung der Wellengleichung

$$\partial_t^2 u(t,x) = c^2 \partial_x^2 u(t,x)$$

ist.

(b) Zeigen Sie, dass

$$u(t,x) = \frac{1}{2}\left(u_0(x+ct) + u_0(x-ct)\right) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} v_0(\xi)d\xi$$

eine Lösung von

$$\begin{aligned} \partial_t^2 u(t,x) &= c^2 \partial_x^2 u(t,x) \qquad , x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(0,x) &= u_0(x) \\ \partial_t u(0,x) &= v_0(x) \end{aligned}$$

ist.

Aufgabe 2:

Weisen Sie nach, dass jede symmetrisch positiv definite, tridiagonale Matrix $M \in \mathbb{R}^{d\times d}$ eine Zerlegung der Form

$$M = LDL^T$$

besitzt mit

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_d \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad L = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ l_1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & l_{d-1} & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3: (Programmieraufgabe: Numerische Lösung der Wärmeleitungsgleichung)
Wir betrachten die Wärmeleitungsgleichung auf dem Intervall $(0, \pi)$ mit homogenen Dirichlet-Randbedingungen:

$$\partial_t u(t,x) = \partial_x^2 u(t,x) \qquad \forall t > 0, x \in (0,\pi) \tag{1a}$$
$$u(0,x) = \sin(x) - \sin(2x) \qquad \forall x \in [0,\pi] \tag{1b}$$
$$u(t,\pi) = u(t,0) = 0 \qquad \forall t \geq 0 \tag{1c}$$

Lösen Sie die partielle Differentialgleichung unter Verwendung der vertikalen Linienmethode numerisch. Verwenden Sie zur Raumdiskretisierung zentrale Differenzen mit Δx als Gitterweite und lösen Sie die resultierende gewöhnliche Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt}\tilde{u}(t) = A_{\Delta x}\tilde{u}(t) + b_{\Delta x}$$

mit Schrittweite $h = \frac{t_{end}}{N}$ durch

(a) die Trapezregel (Crank-Nicolson-Verfahren)

(b) das explizite Euler-Verfahren

und erstellen Sie für beide Verfahren Fehlerplots. Plotten Sie den Fehler aus Teil (a) in Abhängigkeit der Schrittweiten

$$h = \frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}$$

zu der festen Gitterweite $\Delta x = \pi/1000$, sowie den Fehler in Abhängigkeit der Gitterweiten

$$\Delta x = \frac{\pi}{10}, \frac{\pi}{100}, \frac{\pi}{1000}$$

zu der festen Schrittweite $h = 1/1000$. Betrachten Sie für Teil (b) den Fehler in Abhängigkeit der Zeitschrittweiten

$$h = \frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \frac{1}{10000}$$

zu der festen Gitterweite $\Delta x = \pi/10$.

Hinweis: Die exakte Lösung des Anfangs-Randwertproblems erhalten Sie mittels Fouriermethoden (vergleiche mit Kapitel 9.1 der Vorlesung).