Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Angewandte und Numerische Mathematik
JProf. Dr. Tobias Jahnke, Dipl.-Math. techn. Andreas Arnold, Dipl.-Math. techn. Tim Kreutzmann

Numerische Methoden für Differentialgleichungen

Wintersemester 2011/2012

11. Übungsblatt

Besprechung in den Übungen am 12. und 17. 1. 2012

Aufgabe 1:
Angenommen die Funktionen $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ und $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ erfüllen die Gleichung

$$u(x,t) = v\left(\frac{x^2}{t}\right).$$

(a) Zeigen Sie, dass die Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t}u = \frac{\partial^2}{\partial x^2}u$$

genau dann erfüllt ist, wenn

$$4zv''(z) + (2+z)v'(z) = 0 \quad (z \geq 0). \tag{1}$$

(b) Weisen Sie nach, dass

$$v(z) = c\int_0^z e^{-\frac{s}{4}} s^{-\frac{1}{2}} ds + d$$

die gewöhnliche Differentialgleichung (1) auf $(0, \infty)$ löst.

Aufgabe 2:
Zeigen Sie, dass für $k = 1, \ldots, d$ und $\Delta x > 0$

$$v^{(k)} := \left(\sin\left(\frac{k\pi}{d+1}\right), \sin\left(\frac{2k\pi}{d+1}\right), \ldots, \sin\left(\frac{dk\pi}{d+1}\right)\right)^T$$

die Eigenvektoren der Matrix

$$A := \frac{1}{(\Delta x)^2}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & -2 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & -2 & 1 \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{d\times d}$$

zu den Eigenwerten

$$\lambda_k := \frac{2}{(\Delta x)^2}\left(-1 + \cos\left(\frac{k\pi}{d+1}\right)\right)$$

sind.

Aufgabe 3: (Extrapolation der Mittelpunktsregel - Programmieraufgabe)
Eines der frühsten und erfolgreichsten Extrapolationsverfahren basiert auf der expliziten Mittelpunktsregel und wird als *Gragg*-Extrapolation bezeichnet.
Gragg konnte in seiner Dissertation (1964) zeigen, dass der globale Diskretisierungsfehler für die Mittelpunktsregel, gestartet mit einem Euler-Schritt, eine quadratische asymptotische Entwicklung besitzt.

(a) Implementieren Sie die Gragg-Extrapolation. Der Algorithmus soll zu einer vorgegebenen Schrittweite H die Mikroschrittweiten $h_1 = \frac{H}{2}, h_2 = \frac{H}{4}$ und $h_3 = \frac{H}{6}$ verwenden und als Ausgabe die numerische Approximation T_{33} besitzen.

(b) Wenden Sie Ihre Implementierung für $\lambda = 100$ auf das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= -\lambda y(t) + \lambda, \qquad t \in [0,1] \\ y(0) &= 0 \end{aligned} \tag{2}$$

an und erstellen Sie einen Fehlerplot zu den Schrittweiten

$$H = \frac{1}{100}, \frac{1}{200}, \frac{1}{400}, \frac{1}{600}, \frac{1}{800}, \frac{1}{1000}.$$

Entnehmen Sie dem Plot die Ordnung des Verfahrens.
Hinweis: Die exakte Lösung von (2) erhalten Sie mittels Variation der Konstanten.

Achtung: In Kapitel 6, Teil 3 auf Folie 217 ist ein Fehler. Bitte korrigieren Sie die entsprechende Stelle zu

$$T_{j,k} = T_{j,k-1} + \frac{1}{1 - \left(\frac{N_j}{N_{j-k+1}}\right)^2} \left(T_{j-1,k-1} - T_{j,k-1}\right).$$