Numerische Methoden für Differentialgleichungen

Übungsblatt 6

26.11.2013

Tutoriumsaufgabe 26 (dividierte Differenzen)

Zu den Werten $f_j \in \mathbb{R}$, $j = 0, 1, 2, \ldots$, definieren wir

$$\nabla^0 f_j = f_j \qquad \text{und} \qquad \nabla^k f_j = \nabla^{k-1} f_j - \nabla^{k-1} f_{j-1}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

für $j \geq k$. Zeigen Sie, dass dann auf einem äquidistanten Gitter mit Schrittweite $\tau > 0$ gilt:

(a) $\nabla^k f_j = k! \tau^k f[t_{j-k}, \ldots, t_j]$

(b) $\nabla^k f_j = \sum_{n=0}^{k} \binom{k}{n} (-1)^n f_{j-n}$

Tutoriumsaufgabe 27 (Konsistenzordnung von Milne)

Bestimmen Sie die Konsistenzordnung p des Verfahrens von Milne, welches folgende Form besitzt:

$$u^n - u^{n-2} = \frac{\tau}{3}(f^n + 4f^{n-1} + f^{n-2}).$$

Aufgabe 28 (implizites BDF 3-Schrittverfahren)

Bestimmen Sie die Verfahrenskoeffizienten

$$\alpha_0, \ldots, \alpha_3 \text{ und } \beta_0, \ldots, \beta_3$$

des impliziten BDF 3-Schrittverfahrens.

Aufgabe 29 (MSV mit dritter Ordnung)

Bestimmen Sie a, b und c, so dass das Mehrschrittverfahren

$$u^n = u^{n-2} - a(u^{n-1} - u^{n-3}) + \tau(b(f^{n-1} - f^{n-3}) + cf^{n-2})$$

($f^n = f(t_n, u^n)$) von 3. Ordnung ist.

Aufgabe 30 (Maximale Konsistenzordnung eines MSV)

Zeigen Sie, dass für jede Zahl $k \in \mathbb{N}$ (bis auf Normierung) genau ein lineares Mehrschrittverfahren

$$\sum_{i=0}^{k} \alpha_{k-i} u^{n-i} = \tau \sum_{i=0}^{k} \beta_{k-i} f^{n-i}$$

mit der Konsistenzordnung $2k$ existiert, aber keines mit der Konsistenzordnung $2k + 1$.

Aufgabe 31 (Durchführung eines MSV)

(a) Bestimmen Sie das Mehrschrittverfahren der Form

$$u^n + \alpha_2 u^{n-1} + \alpha_1 u^{n-2} + \alpha_0 u^{n-3} = \tau(\beta_2 f^{n-1} + \beta_0 f^{n-3})$$

mit der größtmöglichen Konsistenzordnung.

(b) Das Verfahren aus (a) soll zur Lösung der Anfangswertaufgabe

$$u' = u, \quad u(0) = 1$$

verwendet werden. Berechnen Sie einen Näherungswert für $u(2)$ mit der Schrittweite $\tau = \frac{1}{2}$. Verwenden Sie zur Bestimmung der fehlenden Startwerte das explizite Euler-Verfahren.

Infos: Unter http://www.math.kit.edu/ianm3/lehre/numdgl2013w/ finden Sie die Homepage zur Vorlesung.

Das Tutorium findet jeweils freitags, 14.45 Uhr bis 16.30 Uhr im Raum Z2 statt. Dort erhalten Sie Hilfestellung zu den jeweiligen Aufgaben, eine Lösung wird dort allerdings nicht vorgerechnet. Die zugehörige Übung findet am 02. Dezember 2013 statt.