Numerische Methoden für Differentialgleichungen

Übungsblatt 2

29.10.2013

Aufgabe 6 (Erstellen einer DGL 1. Ordnung)
Formen Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} y_1'' &= t^2 - y_1' - y_2^2, \\ y_2'' &= t + y_2' + y_1^3 \\ y_1(0) = 0, \quad y_2(0) &= 1, \quad y_1'(0) = 1, \quad y_2'(0) = 0 \end{aligned}$$

in ein Anfangswertproblem für ein System erster Ordnung um.

Aufgabe 7 (explizites Euler-Verfahren #1)
Mit dem *expliziten Euler-Verfahren* werden zu diskreten Zeitpunkten

$$t_0 < t_1 < t_2 < \cdots$$

Näherungswerte y_i für die Funktionswerte $y(t_i)$ der Lösung y eines Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= f(t, y(t)) \qquad \text{für } t \geq t_0\,, \\ y(t_0) &= y_0 \end{aligned}$$

nach folgender Vorschrift iterativ berechnet:

$$y_{i+1} := y_i + \tau_i f(t_i, y_i) \qquad i = 0, 1, 2, \ldots$$

Hierbei ist $\tau_i := t_{i+1} - t_i$ die *Schrittweite* des Verfahrens im i-ten Schritt.

(a) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= 2t + 1 \qquad \text{für } t \geq 0 \\ y(0) &= 0\,. \end{aligned}$$

(b) Berechen Sie mit dem expliziten Euler-Verfahren einen Näherungswert für $y(1)$ für die konstanten Schrittweiten $\tau = 1, \tau = \frac{1}{2}, \tau = \frac{1}{4}$. Hierbei bezeichnet y die Lösung des Anfangswertproblems aus Aufgabenteil (a). Bestimmen Sie den absoluten Fehler zu jedem Zeitpunkt t_i.

(c) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= -y(t)^2 \qquad \text{für } t \geq 1\,, \\ y(1) &= 1\,. \end{aligned}$$

(d) Berechnen Sie mit dem expliziten Euler-Verfahren einen Näherungswert für $y(2)$ für die konstanten Schrittweiten $\tau = 1, \tau = \frac{1}{2}$. Hierbei bezeichnet y die Lösung des Anfangswertproblems aus Aufgabenteil (c).

Aufgabe 8 (explizites Euler-Verfahren #2)
Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$\dot{y}(t) = -\frac{y}{1+t}, \qquad t \geq 0, \qquad y(0) = 1\,.$$

(a) Zeigen Sie Existenz und Eindeutigkeit der Lösung.

(b) Das Anfangswertproblem soll numerisch mit Hilfe des expliziten Euler-Verfahren gelöst werden. Geben Sie die Näherungslösung $y_n^{(N)} \approx y(nh^{(N)}), n \geq 0$ zur Schrittweite $h^{(N)} = t_{\text{end}}/N$ ($t_{\text{end}} > 0$) explizit an. Bestimmen Sie damit den exakten Wert $y(t_{\text{end}})$ und daraus die Lösung des Anfangswertproblems.

Aufgabe 9 (autonome Differentialgleichung)
Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie, dass jede Lösung der Differentialgleichung

$$\dot{y}(t) = f(y(t))$$

entweder monoton wachsend oder monoton fallend ist.
Hinweis: Eine solche Differentialgleichung, bei der f nicht von t abhängt, nennt man *autonome Differentialgleichung*.

Aufgabe 10 (Programmieraufgabe)
Gegeben sei für $\lambda < 0$ das Anfangswertproblem

$$\dot{c}(t) = -\lambda c(t), \qquad c(0) = c_0 \qquad t \geq 0\,.$$

Dieses AWP hat die Lösung $c(t) = e^{-\lambda t}$. Programmieren Sie

(a) den expliziten Euler

(b) den impliziten Euler

(c) die explizite Mittelpunktsregel

zur Approximation der Lösung des Anfangswertproblems und testen Sie diese für $\lambda = \log(2)/100$, $c_0 = 100$, $T_{\max} = 100, 200, 1000$, $N = 5, 10, 20, 100$, wobei $T_{\max}$ die maximale Zeitdauer und N die Anzahl der verwendeten Schritte bezeichnet. Plotten Sie dabei in einem gemeinsamen Schaubild die analytische, sowie die numerische Lösung.

Infos: Unter http://www.math.kit.edu/ianm3/lehre/numdgl2013w/ finden Sie die Homepage zur Vorlesung.

Das Tutorium findet jeweils freitags, 14.45 Uhr bis 16.30 Uhr im Raum Z2 statt. Dort erhalten Sie Hilfestellung zu den jeweiligen Aufgaben, eine Lösung wird dort allerdings nicht vorgerechnet. Die zugehörige Übung findet am 05. November 2013 statt. Aufgrund des Feiertags fällt das Tutorium an diesem Freitag aus.