Institut für Angewandte und Numerische Mathematik
Wintersemester 2013/14
Prof. Dr. Christian Wieners, Dr. Daniel Maurer

Numerische Methoden für Differentialgleichungen

Übungsblatt 1

21.10.2013

Tutoriumsaufgabe 1 (Ableitung eines Integrals)

Es seien $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbare Funktionen, $a \in \mathbb{R}$ und $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$y(t) := \int_a^{b(t)} f(s,t)\, ds \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

Zeigen Sie, dass y differenzierbar ist und die Ableitung y' gegeben ist durch

$$y'(t) = f(b(t),t)b'(t) + \int_a^{b(t)} \partial_2 f(s,t)\, ds$$

Tutoriumsaufgabe 2 (Differenzenquotienten)

Gegeben sei $u \in C^3[0,T]$, $t \in (0,T)$, $h > 0$ mit $t-h, t+h \in [0,T]$. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\frac{1}{h}[u(t+h) - u(t)] = \dot{u}(t) + O(h) \qquad \text{(rechter Differenzenquotient)}$$

$$\frac{1}{h}[u(t) - u(t-h)] = \dot{u}(t) + O(h) \qquad \text{(linker Differenzenquotient)}$$

$$\frac{1}{2h}[u(t+h) - u(t-h)] = \dot{u}(t) + O(h^2) \qquad \text{(zentraler Differenzenquotient)}$$

Es gelte zusätzlich $u \in C^4[0,T]$. Zeigen Sie, dass gilt

$$\frac{1}{h^2}[u(t-h) - 2u(t) + u(t+h)] = \ddot{u}(t) + O(h^2) \qquad \text{(zentraler Differenzenquotient 2. Ordnung)}$$

Aufgabe 3 (Nicht-Eindeutigkeit von Anfangswertproblemen)

(a) Geben Sie zwei Lösungen des Anfangswertproblems

$$\dot{y}(t) = \sqrt{y(t)}, \quad y(0) = 0, \quad t \geq 0$$

an.

(b) Zeigen Sie, dass

$$y_1(t) \equiv 1 \quad \text{und} \quad y_2(t) = \sqrt{1-t^2}$$

zwei Lösungen des Anfangswertproblems

$$\dot{y}(t) = -\frac{\sqrt{1-y(t)^2}}{y(t)}, \quad t \in [0,1)$$
$$y(0) = 1$$

sind.

Aufgabe 4 (Lösung einer inhomogenen DGL)

(a) Beweisen Sie:
Sei $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$ und $g\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ eine stetige Funktion. Dann besitzt die lineare inhomogene Differentialgleichung

$$\dot{y}(t) = Ay(t) + g(t, y(t)), \quad y(0) = y_0 \in \mathbb{R}^d$$

die Lösung

$$y(t) = e^{tA}y_0 + \int_0^t e^{(t-s)A} g(s, y(s))\, ds\,.$$

Diese Gleichung wird als *Variation-der-Konstanten-Formel* bezeichnet.

(b) Lösen Sie die Anfangswertprobleme

(a) $\dot{y}(t) = -y(t) + 1, \quad y(0) = 0,$
(b) $\dot{y}(t) = -y(t) + t, \quad y(0) = 0\,.$

In den Lösungsdarstellungen sollen keine Integrale vorkommen.

Aufgabe 5 (Modellierung chemischer Reaktionskinetik)
Gegeben sei ein abgeschlossenes System mit n Substanzen $S_1, \ldots, S_n$ und den zugehörigen Konzentrationen $c_1(t), \ldots, c_n(t)$ zur Zeit t. Die n Substanzen sollen durch m chemische Reaktionen in gegenseitige Wechselwirkung treten.

Dies lässt sich durch das Reaktionsschema

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} S_i \xrightarrow{k_j} \sum_{i=1}^{n} \beta_{ij} S_i, \quad j = 1, \ldots, m$$

beschreiben. Dabei bezeichnen die ganzen positiven Zahlen α_{ij}, β_{ij} die Anteile der Substanzen (stöchiometrische Konstanten) und die positiven reellen Parameter k_j die Reaktionsgeschwindigkeiten.

Als Differentialgleichung für die Konzentration c_i von Substanz S_i erhält man dann

$$\dot{c}_i = \sum_{j=1}^{m} \left((\beta_{ij} - \alpha_{ij}) k_j \prod_{l=1}^{n} \frac{1}{\alpha_{lj}!} c_l^{\alpha_{lj}} \right) .$$

(a) Gegeben sei das Reaktionsschema

$$\begin{aligned} O_3 &\xrightarrow{k_1} O_2 + O \\ O_2 + O &\xrightarrow{k_2} O_3 \,. \end{aligned}$$

Formulieren Sie in Abhängigkeit von k_1 und k_2 das zugehörige Differentialgleichungssystem.

(b) Sei $c_1(t)$ die Konzentration von O, $c_2(t)$ die Konzentration von O_2 und $c_3(t)$ die Konzentration von O_3. Zeigen Sie:

$$c_1(0) + 2c_2(0) + 3c_3(0) = c_1(t) + 2c_2(t) + 3c_3(t) \quad \text{für alle } t \geq 0\,.$$

(c) Zeigen Sie, dass für positive Startwerte $(c_1(0), c_2(0), c_3(0) > 0)$ und $c_1(0) = c_2(0)$ die Lösung des Systems für alle $t \geq 0$ nicht negativ werden kann.
Hinweis: Aufgrund der Stetigkeit reicht es zu zeigen, dass $\dot{c}_i(\tau) > 0$ gilt, falls $c_i(\tau) = 0$ ist.

(d) Ein Laborant verwendet in einem Experiment die Konzentrationen $c_1(0) = 5$ und $c_2(0) = 4$. Die Reaktionsgeschwindigkeiten sind $k_1 = 2$ und $k_2 = 3$. Das Experiment weist scheinbar keine Reaktion auf. Wie war die Konzentration $c_3(0)$ gewählt.

Infos: Unter http://www.math.kit.edu/ianm3/lehre/numdgl2013w/ finden Sie die Homepage zur Vorlesung.

Das Tutorium findet jeweils freitags, 14.45 Uhr bis 16.30 Uhr im Raum Z2 statt. Dort erhalten Sie Hilfestellung zu den jeweiligen Aufgaben, eine Lösung wird dort allerdings nicht vorgerechnet. Die zugehörige Übung findet am 29. Oktober 2013 statt.