4 Steife Differentialgleichungen

(4.1) Die Lösung einer AWA $\dot{u} = f(t,u)$ in $[0,\infty)$ mit $u(0) = u_0$ heißt *stabil*, wenn für alle u_0

$$|u(t)| \le C\,|u_0|$$

gilt, und *asymptotisch stabil*, wenn für alle u_0 gilt

$$\lim_{t \longrightarrow \infty} |u(t)| = 0\,.$$

(4.2) Für lineare AWA hat ein Runge-Kutta-Verfahren die Form $u^n = R(\tau_n A)u^{n-1}$ mit

$$R(\zeta) = \frac{P(\zeta)}{Q(\zeta)} \qquad \text{und Polynomen} \qquad P, Q \in \mathbb{P}_S\,.$$

Für explizite Verfahren ist R ein Polynom.

Wenn das Verfahren die Ordnung p hat, gilt: $R(\zeta) = \sum_{j=0}^{p} \frac{1}{j!}\zeta^j + O(\zeta^{p+1})$.

(4.3) Ein Runge-Kutta-Verfahren heißt *A-stabil*, wenn die linke Halbebene

$$\mathbb{C}_- = \{\zeta \in \mathbb{C} \colon Re(\zeta) \le 0\} = \{\zeta \in \mathbb{C} \colon |\exp(\zeta)| \le 1\}$$

im Stabilitätsgebiet $S = \{\zeta \in \mathbb{C} \colon |R(\zeta)| \le 1\}$ enthalten ist.

(4.4) Für A-stabile Runge-Kutta-Verfahren gilt: Wenn die lineare AWA stabil ist, dann ist auch die numerische Lösung $u^n = R(\tau A)^n u^0$ stabil mit $|u^n| \le C\,|u^0|$ für alle Schrittweiten $\tau > 0$.

4 Steife Differentialgleichungen

(4.5) Ein A-stabiles Runge-Kutta-Verfahren heißt *L-stabil*, wenn für die rationale Funktion $R(\infty) = \lim_{|\zeta|\to\infty} R(\zeta) = 0$ gilt.

(4.6) Sei $\begin{array}{c|c} c & \mathscr{A} \\ \hline & b^T \end{array}$ ein A-stabiles Runge-Kutta-Verfahren mit $a_{Sr} = b_r$, $r = 1, \dots, S$, und sei $\mathscr{A}$ invertierbar. Dann ist das Verfahren L-stabil.

(4.7) $A \in \mathbb{R}^{M,M}$ ist genau dann schiefsymmetrisch (d. h. $A^T = -A$), wenn $\exp(tA)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ orthogonal ist, d. h. $\exp(tA)\exp(tA)^T = I_M$.

(4.8) Ein Runge-Kutta-Verfahren heißt *reversibel*, wenn $R(\zeta)\,R(-\zeta) \equiv 1$.

(4.9) Sei R rationale Funktion zu einem Runge-Kutta-Verfahren mit $R(\zeta) = 1 + \zeta + O(\zeta^2)$, und R habe keine Polstelle in $\mathbb{C}_-$. Dann ist äquivalent:

a) $S = \{\zeta \in \mathbb{C} \colon |R(\zeta)| \le 1\} = \mathbb{C}_-$
b) $|R(\zeta)| = 1$ für $\mathrm{Re}(\zeta) = 0$
c) $R(\zeta)\,R(-\zeta) \equiv 1$

(4.10) Sei $A^T = -A$ schiefsymmetrisch und sei R rationale Funktion eines Runge-Kutta-Verfahrens mit $S = \mathbb{C}_-$. Dann gilt:
$R(\tau A)$ ist orthogonal und $|u^n|_2 = |u^{n-1}|_2$ für $u^n = R(\tau A)u^{n-1}$.

4 Steife Differentialgleichungen

(4.12) Eine Funktion $f \in C([t_0, t_0 + T] \times G, \mathbb{R}^M)$ heißt *monoton* (in der zweiten Komponente), wenn bzgl. einem Skalarprodukt $(\cdot, \cdot)$

$$\big(f(t,z) - f(t,y), z - y\big) \geq 0 \qquad t \in [t_0, t_0 + T], \quad z, y \in G.$$

gilt.

(4.11) Eine AWA $\dot{u}(t) = f\big((t, u(t)\big)$, $t \in [t_0, t_0 + T]$ heißt dissipativ, wenn $-f$ monoton ist. Dann gilt für jede weitere Lösung $\dot{v}(t) = f\big((t, v(t)\big)$

$$|u(t) - v(t)| \leq |u(t_0) - v(t_0)|, \qquad t \in [t_0, t_0 + T].$$

(4.12) Ein Einschrittverfahren ψ heißt *B-stabil*, wenn für dissipative AWA

$$|u^n - v^n| \leq |u^{n-1} - v^{n-1}|$$

mit $u^n = u^{n-1} + \tau_n \psi(t_{n-1}, \tau_n, u^{n-1})$ und $v^n = v^{n-1} + \tau_n \psi(t_{n-1}, \tau_n, v^{n-1})$ gilt.

(4.13) B-stabile Runge-Kutta-Verfahren sind A-stabil.

(4.14) Ein Runge-Kutta-Verfahren heißt algebraisch stabil, wenn

a) $\mathscr{M} = \mathrm{diag}(b_s)\mathscr{A} + \mathscr{A}^T \mathrm{diag}(b_s) - bb^T$ positiv semidefinit

b) $b_s \geq 0$

(4.15) Algebraisch stabile Runge-Kutta-Verfahren sind B-stabil.

4 Steife Differentialgleichungen

(4.16) Zu Stützstellen $0 \leq c_1 < c_2 < \cdots < c_S \leq 1$ definieren wir ein *Kollokationsverfahren* durch: Bestimme ein Polynom $P \in \mathbb{P}_S(\mathbb{R}^M)$ mit $P(t_{n-1}) = u^{n-1}$ und

$$\frac{d}{dt}P(t_{n,s}) = f(t_n, P(t_{n,s})) \quad \text{für} \quad t_{n,s} = t_{n-1} + c_s\tau_n\,, \qquad s = 1,...,S$$

und setze $u^n = P(t_n)$ (falls diese Interpolationsaufgabe lösbar ist).

(4.17) Das Kollokationsverfahren ist ein Runge-Kutta-Verfahren mit

$$b_s = \int_0^1 L_s(t)dt \;\text{ und }\; a_{sr} = \int_0^{c_s} L_r(t)dt \;\text{ für }\; L_s(t) = \prod_{\substack{r=1\\ r\neq s}}^{S} \frac{t-c_r}{c_s-c_r}.$$

(4.18) Wenn die Quadratur (c_s, b_s) die Fehlerordnung p hat (d.h., die Quadratur ist für Polynome von Grad $p-1$ exakt), dann hat auch das Kollokationsverfahren die Ordnung p. Für die Gauß-Quadratur gilt $p = 2S$.

(4.19) Die Kollokationsverfahren zur Gauß- und Radau-Quadratur sind B-stabil.

(4.20) Das Kollokationsverfahren zur Gauß-Quadratur ist reversibel.
Wenn die Differentialgleichung $\dot{u} = f(u)$ ein quadratisches erstes Integral

$$\mathscr{E}(z) = z^T Qz + b^T z + e$$

erhält, d.h., $\mathscr{E}(u(t)) \equiv \text{const.}$, dann gilt auch für das Gauß-Verfahren $\mathscr{E}(u^n) = \mathscr{E}(u^{n-1})$.

4 Steife Differentialgleichungen – DAE-Systeme

(4.21) Seien f, g stetig differenzierbar und $D_3 g(t_0, u_0, v_0)$ invertierbar. Betrachte

$$\dot{u} = f(t,u,v), \qquad 0 = g(t,u,v), \qquad u(t_0) = u_0,\ v(t_0) = v_0,\ g(t,u_0,v_0) = 0\ .$$

Dann existiert $T > 0$, sodass die DAE in $[t_0, t_0 + T]$ eindeutig lösbar ist.

(4.22) Sei $\begin{array}{c|c} c & \mathscr{A} \\ \hline & b^T \end{array}$ ein Runge-Kutta-Verfahren der Ordnung p mit $a_{Sr} = b_r$ und

$$\begin{pmatrix} u^n \\ v^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^{n-1} \\ v^{n-1} \end{pmatrix} + \tau \sum_{s=1}^{S} b_s \begin{pmatrix} k_s \\ \ell_s \end{pmatrix}$$

mit

$$\begin{pmatrix} k_s \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(t_{n,s}, u^{n,s}, v^{n,s}) \\ g(t_{n,s}, u^{n,s}, v^{n,s}) \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{rcl} u^{n,s} & = & u^{n-1} + \tau_n \sum a_{sr} k_r\,, \\ v^{n,s} & = & v^{n-1} + \tau_n \sum a_{sr} \ell_r\,. \end{array}$$

Dann gilt $\big|(u^n, v^n) - (u(t_n), v(t_n))\big| = O(\tau^p)$.

(4.23) Sei zusätzlich $\mathscr{A}$ invertierbar. Dann konvergiert die Runge-Kutta-Lösung zu

$$\dot{u}^\varepsilon = f(t, u^\varepsilon, v^\varepsilon), \quad \varepsilon \dot{v}^\varepsilon = g(t, u^\varepsilon, v^\varepsilon), \quad u^\varepsilon(t_0) = u_0,\ v^\varepsilon(t_0) = v_0,\ g(t,u_0,v_0) = 0$$

für $\varepsilon \longrightarrow 0$ gegen die Lösung von (4.22).