Karlsruher Institut für Technologie

Prof. Dr. Andreas Rieder
Dipl.-Math. techn. Tim Kreutzmann
Institut für Angewandte und Numerische Mathematik
Fakultät für Mathematik

Mathematik 1 für Informationswirtschaft (Winter 2012/13)

14. Übungsblatt vom 28. Januar 2013

Aufgabe 55: (schriftlich) (4+2 Punkte)
Es sei $T\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, $x \mapsto Ax$ gegeben. Die Matrix A besitze die Eigenwerte $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = -1$ und die zugehörigen Eigenräume

$$E(1) = \operatorname{spann}\left\{\begin{pmatrix}0\\2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}\right\},\ E(0) = \operatorname{spann}\left\{\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\},\ E(-1) = \operatorname{spann}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}.$$

(a) Berechnen Sie die Matrix A (bezgl. der Standardbasis).

(b) Bestimmen Sie die Urbildmenge

$$T^{-1}\left(\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\2\\1\end{pmatrix}\right\}\right).$$

Aufgabe 56: (mündlich) (6 Punkte)
Gegeben sei die Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit dem charakteristischem Polynom

$$p_A(\lambda) = \alpha_0 + \alpha_1\lambda + \cdots + \alpha_n\lambda^n.$$

Zeigen Sie:

(a) Es gilt $\det A = \alpha_0$ und A ist genau dann regulär, wenn 0 kein Eigenwert von A ist.

(b) Ist A regulär, dann besitzen A und A^{-1} dieselben Eigenräume.

(c) Berechnen Sie für reguläres A die Koeffizienten $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n$ des charakteristischen Polynoms

$$p_{A^{-1}}(\lambda) = \beta_0 + \beta_1\lambda + \cdots + \beta_n\lambda^n$$

von A^{-1} in Abhängigkeit von $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$.

Aufgabe 57: (schriftlich) (2+4+4 Punkte)
Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenräume der folgenden Matrizen und argumentieren Sie, ob diese diagonalisierbar sind. Geben Sie gegebenenfalls eine invertierbare Matrix S_i an, sodass $D_i = S_i^{-1}A_iS_i$ Diagonalgestalt hat.

(a) $A_1 = \begin{pmatrix}1 & i\\ i & -1\end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$,

(b) $A_2 = \begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & -2 & 1\\ 2 & 1 & -2\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$,

(c) $A_3 = \begin{pmatrix}1 & 3 & 6\\ -3 & -5 & -6\\ 3 & 3 & 4\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

Aufgabe 58: (mündlich) (6 Punkte)
Berechnen Sie für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 5 \\ -1 & -1 & -1 & -5 \\ -2 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

die Matrix

$$B = A^{10} - 3A^9 - A^2 + 4A$$

mithilfe des Satzes von Cayley-Hamilton.

Abgabe
Werfen Sie Ihre Lösungen bis zum **Montag, den 04. Februar 2013, 11.00 Uhr** in den mit „Mathematik für Informationswirtschaft“ gekennzeichneten grünen Abgabekasten im 1. OG des C-Teils des Allianz-Gebäudes ein. Schreiben Sie bitte auf **jedes** Ihrer Blätter Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppe (A-G).