KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
Dipl.-Phys. Maria Radosz

SS 2010
6.5.2010

**4. Übungsblatt**

**Grundbegriffe der Mathematik**
**für Ingenieur-Pädagoginnen und -Pädagogen**

Abgabe: bis **Donnerstag**, den **20.5.2010**, 14.00 Uhr

### Aufgabe 15 (K) (4 Punkte)

$A, B$ seien Mengen mit $A \sim B$. Man zeige: $\mathcal{P}(A) \sim \mathcal{P}(B)$.

### Aufgabe 16

Es seien $u, v, w$ Kardinalzahlen. Man zeige: Aus $u \leq v$ und $v \leq w$ folgt $u \leq w$.

### Aufgabe 17 (K) (4 Punkte)

Sind die folgenden Aussagen wahr? Begründen Sie Ihre Antwort!

**a)** $\big|\emptyset\big| < \big|\{\{\{\emptyset\}\}\}\big| < \big|\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\big| < \big|\mathbb{N}^4\big| \leq \big|\mathbb{N}^3\big| < \big|\mathbb{R}^2\big| \leq \big|\mathbb{R}\big| < \big|\mathcal{P}(\mathbb{R}^{42})\big| \leq \big|\mathcal{P}(\mathbb{R})\big|$.

**b)** $\big|\{7\}\big| < \big|\{8\}\big|$.

**c)** Es gibt eine Teilmenge $M \subseteq [0,1]$, für die gilt: $\aleph_0 \leq |M| < \mathfrak{c}$.

**d)** Für jede Teilmenge $M \subseteq [0,1]$ gilt: $\aleph_0 \leq |M| \leq \mathfrak{c}$.

**e)** Für den Kreis $K = \{(x,y) \,|\, (x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 = 1\}$ gilt $|K| = \mathfrak{c}$.

**f)** Ist $u$ eine Kardinalzahl mit $u \leq \aleph_0$ und $n \leq u$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so folgt $u = \aleph_0$.

**g)** Ist $u$ eine Kardinalzahl mit $u \leq \mathfrak{c}$ und $n < u$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so folgt $u = \mathfrak{c}$.

**h)** Ist $u$ eine Kardinalzahl mit $u \leq \aleph_0$ und $n \neq u$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so folgt $u = \aleph_0$.

**i)** $\big|\{1,2,3,4,5,6\}\big| < \big|[1,2] \cup [3,4] \cup [5,6]\big| = \aleph_0$.

**j)** $\big|\mathbb{N} \cup \{\pi/2\} \cup [-\frac{3}{4}, -\frac{1}{4}[ \cup [\frac{1}{17}, \frac{2}{17}]\big| = \mathfrak{c}$.

— bitte wenden —

**Aufgabe 18**

Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = x^2$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
Die Abbildung $F : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}(\mathbb{R})$ sei definiert durch $F(A) := f[A]$ für alle $A \subseteq \mathbb{R}$.

**a)** Zeigen Sie, dass $F$ die Voraussetzungen des Satzes von Knaster-Tarski erfüllt.

**b)** Nach dem Satz von Knaster-Tarski gibt es mindestens ein $C \subseteq \mathbb{R}$ mit $F(C) = C$. Geben Sie nun explizit Fixpunkte $C_1, C_2, C_3 \subseteq \mathbb{R}$ an, die $F(C_i) = C_i$, $(i = 1, 2, 3)$ und

$$\begin{aligned} |C_1| &= 2 \\ |C_2| &= \aleph_0 \\ |C_3| &= \mathfrak{c} \end{aligned}$$

erfüllen.