6. Übungsblatt
Aufgaben mit Lösungen

Aufgabe 26: Gegeben sind zwei geordnete Basen A und B des $\mathbb{R}^3$

$$A = \left(\begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -16 \\ 7 \\ -13 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix} \right), \qquad B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$

und eine lineare Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, die bezüglich der Basis A die folgende Darstellungsmatrix hat

$$_AM(\varphi)_A = \begin{pmatrix} 1 & -18 & 15 \\ -1 & -22 & 15 \\ 1 & -25 & 22 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix $_BM(\varphi)_B$ von φ bezüglich der geordneten Basis B.
Lösung 26: Es gilt

$$_BM(\varphi)_B = {_BM}(\mathrm{id} \circ \varphi \circ \mathrm{id})_B = {_BM}(\mathrm{id})_A \, {_AM}(\varphi)_A \, {_AM}(\mathrm{id})_B \,.$$

Um also $_BM(\varphi)_B$ zu ermitteln, ist das Produkt der drei Matrizen $_BM(\mathrm{id})_A$, $_AM(\varphi)_A$ und $_AM(\mathrm{id})_B$ zu bilden. Die Matrix $_AM(\varphi)_A$ ist gegeben, die anderen beiden Matrizen müssen wir noch bestimmen. Wegen $_BM(\mathrm{id})_A \, {_AM}(\mathrm{id})_B = {_BM}(\mathrm{id})_B = \mathbf{E}_3$ ist $_AM(\mathrm{id})_B$ das Inverse zu $_BM(\mathrm{id})_A$.
Wir bezeichnen die Elemente der geordneten Basis der Reihe nach mit a_1, a_2, a_3 und jene der Basis B mit b_1, b_2, b_3 und ermitteln $_BM(\mathrm{id})_A = ({_Ba_1}, {_Ba_2}, {_Ba_3})$. Gesucht sind also $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ mit

$$\lambda_1 \, b_1 + \lambda_2 \, b_2 + \lambda_3 \, b_3 = a_1 \text{ bzw. } = a_2 \text{ bzw. } = a_3 \,.$$

Dies sind drei lineare Gleichungssysteme, die wir simultan lösen:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 8 & -16 & 9 \\ -2 & -1 & 1 & -6 & 7 & -3 \\ 1 & 2 & 2 & 7 & -13 & 7 \end{array} \right) \to \cdots$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right)$$

Damit lautet die Basistransformationsmatrix

$$_BM(\mathrm{id})_A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Matrix $_AM(\mathrm{id})_B$ erhalten wir durch Invertieren der Matrix $_BM(\mathrm{id})_A$. Es gilt

$$_AM(\mathrm{id})_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & -6 \end{pmatrix}$$

Wir berechnen schließlich das Produkt

$$\begin{aligned} _BM(\varphi)_B &= {_BM}(\mathrm{id})_A \, {_AM}(\varphi)_A \, {_AM}(\mathrm{id})_B \\ &= \begin{pmatrix} 16 & 47 & -88 \\ 18 & 44 & -92 \\ 12 & 27 & -59 \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Aufgabe 27:

(a) Berechnen Sie das charakteristische Polynom $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ der Matrix A für $\lambda \in \mathbb{R}$ und

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

(b) Bestimmen Sie die Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ der Matrix A.

(c) Geben Sie die Eigenvektoren zu den Eigenwerten an.

Lösung 27:

(a) $p(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 2 \\ 1 & 2-\lambda & 2 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & 2-\lambda \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \cdots = -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 11\lambda + 5.$

(b) Nach Probieren von $\lambda = 1$ erhalten wir mit Polynomdivision $-\lambda^3+7\lambda^2-11\lambda+5 = -(\lambda-1)(\lambda^2-6\lambda+5) = -(\lambda-1)^2(\lambda-5)$ und damit die Eigenwerte der Matrix A, $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 5$.

(c) Die Eigenwerte zum Eigenwert $\lambda_1 = 1$ erhalten wir aus dem linearen Gleichungssystem

$$(A - \lambda_1 I)x = (A - I)x = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} x = 0\,.$$

Nach einem Gauß-Schritt erhalten wir die Gleichung $x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$, also sind alle $x = \alpha(1,-1,0)^\top + \beta(2,0,-1)^\top \neq 0$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ Eigenvektoren zu $\lambda_{1,2} = 1$.

Zum Eigenwert $\lambda_3 = 5$ lösen wir das Gleichungssystem $(A - \lambda_3 I)x = (A - 5I)x = 0$, dies führt auf das Tableau

$$\begin{array}{ccc} -3 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 2 \\ \boxed{1} & 1 & -2 \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{ccc} 0 & \boxed{4} & -4 \\ 0 & -4 & 4 \\ \mathbf{1} & 1 & -2 \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{ccc} 0 & \mathbf{4} & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{1} & 0 & -1 \end{array}$$

aus dem wir mit $x_3 = -\alpha$ die Lösungen $x = \alpha(1,1,1)^\top$, $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ erhalten.

Aufgabe 28: Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 2 & 2a \end{pmatrix}$

(a) Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix A in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$.

(b) Geben Sie für $a = 2$ eine Basis von $\mathbf{ker}\,(A)$ sowie eine Basis von $\mathbf{Bild}\,(A)$ an.

Lösung 28:

(a) Das charakteristische Polynom von A ist

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 1-\lambda & a \\ 0 & 2 & 2a-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(\lambda^2 - (2a+1)\lambda) = (3-\lambda)\lambda(\lambda - 2a - 1) \stackrel{!}{=} 0$$

Die Eigenwerte von A sind also $3, 0, 1+2a$. Wenn $a \neq 1$ und $a \neq -1/2$, dann sind die Eigenwerte verschieden und die zugehörigen Vektoren linear unabhängig (vgl. Satz 3.26 im Skript).

Zuerst berechnen wir die Eigenvektoren zu $\lambda = 3$: Das zu lösende LGS ist $(A - 3I_3)u = 0$, also

$$\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & a & 0 \\ 0 & 2 & 2a-3 & 0 \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -a & 0 \\ 0 & 0 & 3a-3 & 0 \end{array}.$$

Aus der ersten Gleichung erhalten wir $u_3 = 0$, dann aus der zweiten $u_2 = 0$ und u_1 können wir beliebig wählen. Also die Eigenvektoren zu $\lambda = 3$ sind $u = \mu(1,0,0)^\top$ mit $\mu \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Analog bestimmen wir die Eigenvektoren zu $\lambda = 0$: Das zu lösende LGS ist $(A - 0I_3)u = 0$, also

$$\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 2 & 2a & 0 \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}.$$

Die erste Gleichung ist $3u_1 = -2u_3$ und die zweite ist $u_2 = -au_3$. Somit sind die Eigenvektoren zu $\lambda = 0$ die Vektoren $u = \mu(-\frac{2}{3}, -a, 1)^\top$ mit $\mu \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Für die Eigenvektoren zu $\lambda = 1 + 2a$ lösen wir das LGS $(A - (1+2a)I_3)u = 0$:

$$\begin{array}{ccc|c} 2-2a & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2a & a & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{ccc|c} 2-2a & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}.$$

Die erste Gleichung ergibt $(1-a)u_1 = -u_3$ und die zweite $u_2 = \frac{1}{2}u_3$. Die Eigenvektoren zu $\lambda = 1+2a$ sind $u = \mu(1, \frac{a-1}{2}, a-1)^\top$ mit $\mu \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Falls $a \neq 1$ und $a \neq -1/2$, sind die Eigenvektoren zu $\lambda = 1+2a$ verschieden von den Eigenvektoren zu $\lambda = 0$ und $\lambda = 3$. Falls $a = 1$ oder $a = -1/2$, liefert $\lambda = 1 + 2a$ keine neuen Eigenvektoren (Warum?). In diesem Fall spannen die gefundenen Eigenvektoren $\mathbb{R}^3$ nicht auf.

(b) Mit $\mathbf{ker}(A)$ werden alle Vektoren x bezeichnet, für die gilt $Ax = 0$. Dies sind alle $x \in \mathbf{span}\left\{\left(\frac{2}{3}, 2, -1\right)^\top\right\}$ für $a = 2$. Somit ist $\left(\frac{2}{3}, 2, -1\right)^\top$ eine Basis von $\mathbf{ker}(A)$. Allgemein gilt

$$\mathbf{ker}(A) = \mathbf{span}\,\{\text{Eigenvektoren von A zum Eigenwert } 0\}\,.$$

Mit dem $\mathbf{Bild}(A)$ wird der

$$\mathbf{span}\,\{\text{Spaltenvektoren von A}\} \overset{\text{Für diagonalisierbare Matritzen}}{=} \mathbf{span}\,\{\text{Eigenvektoren zu Eigenwerten } \neq 0\}$$

bezeichnet. Hier gilt für $a = 2$: $\mathbf{Bild}(A) = \mathbf{span}\left\{(1,0,0)^\top, \left(1,\frac{1}{2},-1\right)^\top\right\}$. Somit bilden $(1,0,0)^\top$, $\left(1,\frac{1}{2},-1\right)^\top$ eine Basis von $\mathbf{Bild}(A)$.

Aufgabe 29: Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 4 \\ 0 & -6 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

(a) Berechnen Sie die Eigenwerte von A.

(b) Sei $p(x) = c_3x^3+c_2x^2+c_1x+c_0$ das charakteristische Polynom von A. Zeigen Sie, dass $p(A) = 0$, d.h. $c_3A^3+c_2A^2+c_1A+c_0I_3 = 0$. (Das gilt auch allgemein für jede quadratische Matrix und ihr charakteristisches Polynom!)

(c) Bestimmen Sie aus $p(A) = 0$ die inverse Matrix A^{-1}.

Lösung 29: (a) Das charakteristische Polynom von A ist

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det(A-\lambda I_3) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 0 & 4 \\ 0 & -6-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)\begin{vmatrix} -6-\lambda & 0 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -6-\lambda & 0 \end{vmatrix} \\ &= (5-\lambda)(-6-\lambda)(2-\lambda) - 4(-6-\lambda) = -(\lambda+6)(\lambda-1)(\lambda-6) = -\lambda^3+\lambda^2+36\lambda-36. \end{aligned}$$

Die Eigenwerte von A sind -6, 1, 6.
(b) Aus (a) wissen wir, dass $p(\lambda) = -\lambda^3+\lambda^2+36\lambda-36$, also wollen wir zeigen

$$p(A) = -A^3+A^2+36A-36I_3 \overset{!}{=} 0.$$

Nachrechen liefert $A^2 = \begin{pmatrix} 29 & 0 & 28 \\ 0 & 36 & 0 \\ 7 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ und $A^3 = \begin{pmatrix} 173 & 0 & 172 \\ 0 & 216 & 0 \\ 43 & 0 & 44 \end{pmatrix}$. Also

$$p(A) = \begin{pmatrix} -173 & 0 & -172 \\ 0 & 216 & 0 \\ -43 & 0 & -44 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 29 & 0 & 28 \\ 0 & 36 & 0 \\ 7 & 0 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 180 & 0 & 144 \\ 0 & -216 & 0 \\ 36 & 0 & 72 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -36 & 0 & 0 \\ 0 & -36 & 0 \\ 0 & 0 & -36 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(c) Wir formen die Gleichung $-A^3+A^2+36A-36I_3 = 0$ um:

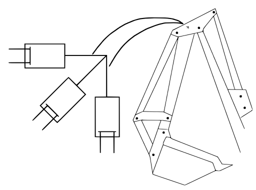
$$\frac{1}{36}\left(-A^2+A+36\right)A = I_3.$$

Daraus können wir schließen, dass $A^{-1} = \frac{1}{36}\left(-A^2+A+36\right)$. Also

$$A^{-1} = \frac{1}{36}\left[\begin{pmatrix} -29 & 0 & -28 \\ 0 & -36 & 0 \\ -7 & 0 & -8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 0 & 4 \\ 0 & -6 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 36 & 0 & 0 \\ 0 & 36 & 0 \\ 0 & 0 & 36 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{1}{6} & 0 \\ -\frac{1}{6} & 0 & \frac{5}{6} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 30: Durch eine Dehnmessstreifen-Rosette kann auf der Oberfläche eines Bewegungsmechanismus einer Baggerschaufel der Verzerrungszustand in Form des Verzerrungstensors bzgl. des x_1, x_2, x_3-Koordinatensystems bestimmt werden. Aus dem Tensor will man die Hauptdehnungen bestimmen. Diese sind bei isotropen Materialien ein Maß für die auftretenden maximalen Kräfte in den zugehörigen Richtungen.

Berechnen Sie zum aus der Messung bestimmten Tensor



$$\varepsilon = \frac{1}{50}\begin{pmatrix} 142 & -144 & 0 \\ -144 & 58 & 0 \\ 0 & 0 & -125 \end{pmatrix}$$

alle Hauptdehnungen (d.h. die Eigenwerte von ε) und geben Sie zu jeder Hauptdehnung einen auf die Länge 1 normierte Eigenvektor als zugehörige Hauptdehnungsrichtung an. Unter welchem Winkel stehen die Hauptdehnungsrichtungen zueinander? Zeigen Sie, dass die normierten Eigenvektoren eine Basis bilden. Es gibt eine Rotationsmatrix R, die die alte Basis auf die neue Basis abbildet. Bestimmen Sie den Drehwinkel φ.

Lösung 30: Das charakteristische Polynom von ε lautet

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det(\varepsilon-\lambda I_3) = \det\begin{pmatrix} \frac{142}{50}-\lambda & -\frac{144}{50} & 0 \\ -\frac{144}{50} & \frac{58}{50}-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{125}{50}-\lambda \end{pmatrix} = \left(-\frac{125}{50}-\lambda\right)\det\begin{pmatrix} \frac{142}{50}-\lambda & -\frac{144}{50} \\ -\frac{144}{50} & \frac{58}{50}-\lambda \end{pmatrix} \\ &= \left(-\frac{5}{2}-\lambda\right)\left(\left(\frac{142}{50}-\lambda\right)\left(\frac{58}{50}-\lambda\right)-\frac{144^2}{50^2}\right) = \left(-\frac{5}{2}-\lambda\right)\left(\frac{142\cdot 58-144^2}{50^2}-\frac{142+58}{50}\lambda+\lambda^2\right) \\ &= \left(-\frac{5}{2}-\lambda\right)(-5-4\lambda+\lambda^2) = \left(-\frac{5}{2}-\lambda\right)(-5+\lambda)(1+\lambda) \end{aligned}$$

Damit erhalten wir als Eigenwerte $\lambda_1 = 5, \lambda 2 = -1$ und $\lambda_3 = -\frac{5}{2}$. Zur Bestimmung der zugehörigen Eigenvektoren müssen wir $\varepsilon - \lambda I = 0$ lösen; dazu multiplizieren wir zunächst jede Zeile mit 50 und erhalten das Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccc|c} 142-50\lambda & -144 & 0 & 0 \\ -144 & 58-50\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -125-50\lambda & 0 \end{array}$$

1. Fall: $\lambda_1 = 5$ führt auf das LGS

$$\begin{array}{ccc|c} -108 & -144 & 0 & 0 \\ -144 & -192 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -325 & 0 \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

   Also ist $x_3 = 0$ und $x_2 = -\frac{3}{4}x_1$, somit ist die Lösungsmenge $\operatorname{span}\{(-4,3,0)^\top\}$. Da $||(-4,3,0)^\top|| = 5$ ist, lautet eine normierte Richtung $d_1 = \frac{1}{5}(-4,3,0)^\top$. In dieser Richtung liegt eine starke Dehnung vor.

2. Fall: $\lambda_2 = -1$ führt auf

$$\begin{array}{ccc|c} 192 & -144 & 0 & 0 \\ -144 & 108 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -75 & 0 \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccc|c} 4 & -3 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

   Also ist $x_3 = 0$ und $x_2 = \frac{4}{3}x_1$, somit ist die Lösungsmenge $\operatorname{span}\{(3,4,0)^\top\}$. Da wieder $||(3,4,0)^\top|| = 5$ ist, lautet eine normierte Richtung $d_2 = \frac{1}{5}(3,4,0)^\top$. In dieser Richtung haben wir eine Kompression.

3. Fall: $\lambda_3 = -5/2$

   Dann ist $-125 - 50\lambda = 0$ und nun wird die letzte Spalte zu 0, also ist $(0,0,1)^\top$ ein Eigenvektor. Wegen $||(0,0,1)^\top|| = 1$ ist $d_3 = (0,0,1)^\top$ eine passende Dehnungshauptrichtung, in welcher ebenfalls eine Kompression gemessen wurde.

Da jeweils $d_1 \cdot d_2 = 0$, $d_1 \cdot d_3 = 0$ und $d_2 \cdot d_3 = 0$, sind die vom Nullvektor verschiedenen Dehnungshauptrichtungen senkrecht aufeinander und können nicht linear abhängig sein. Damit bilden diese drei Vektoren eine Basis des $\mathbb{R}^3$.
Da der Vektor d_3 mit dem dritten Standardbasisvektor übereinstimmt, können wir die Basis $\{d_1, d_2, d_3\}$ Drehung der Standardbasis um die Drehachse d_3 auffassen. Als Winkel φ_1 zwischen d_1 und dem ersten Standardbasisvektor e_1 (bzw. e_2) berechnen wir:

$$\cos\varphi_1 = \frac{d_1 \cdot e_1}{||d_1||\,||e_1||} = \frac{-\frac{4}{5}}{1} = -\frac{4}{5}, \qquad \cos\varphi_2 = \frac{3}{5}$$

Dies entspricht etwa rund 36.9° bzw. $90° - 36.9° = 53.1°$.
Anmerkungen: Zur Vereinfachung der Aufgabe wurden die Werte geschönt, realistisch wird der einheitenlose Verzerrungstensor nach Multiplikation mit 10^{-6}. Dadurch erhält man dann Hauptdehnungen in der Größenordnung von maximal 10^{-4}, und dies spiegelt wieder, dass Metalle fast inkompressibel sind: Die Summe der Hauptdehnungen entspricht der relativen Volumenänderung, und sollte bei Metallen sehr, sehr klein sein.