$$\int_{-1}^{+1}\sqrt{1-\tau^2}\,d\tau \;\Big/\; \text{Substitution } \tau=\sin t \;\Big/ = \frac{\pi}{2}.$$

$$\int^{x}\cos^2 t\,dt = \frac{1}{2}(\sin x\cos x + x)$$

Beispiel: $f:[a,b]\to[f(a),f(b)]$ sei stetig, bijektiv.
Es gilt: $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx + \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(x)\,dx = bf(b)-af(a).$

---

14. Kapitel Taylorsatz. Hinreichende Bedingungen für Extremwerte. Taylorreihen.

14.1 Satz 1 (Taylorsatz)

Es sei I ein Intervall und $x, x_0\in I$. Es sei $f\in C^{n+1}(I)$ $(n=0,1,2\ldots)$. Dann gilt

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k + R_{n+1}(x)$$

mit $\displaystyle R_{n+1}(x) = \int_{x_0}^{x}\frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\,dt = f^{(n+1)}(\xi)\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$

mit einer Zahl ξ zwischen x und x_0.

$\displaystyle T_n(f,x_0)(x) := \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k$ heißt n-tes Taylorpolynom zu f und x_0

14.2 Satz 2 Es sei $f\in C^{n+1}[a,b]$ und $x_0\in(a,b)$.
Es seien $f^{(j)}(x_0)=0$ für $j=1,2,\ldots,n-1$ und $f^{(n)}(x_0)\neq 0$ erfüllt. Dann gelten:
Ist n ungerade, so besitzt f in x_0 keinen lokalen Extremwert
Ist n gerade, so liegt

$$\begin{cases}\text{im Fall } f^{(n)}(x_0)>0 \text{ bei } x_0 \text{ ein lokales Minimum}\\ \text{im Fall } f^{(n)}(x_0)<0 \text{ bei } x_0 \text{ ein lokales Maximum}\end{cases}$$

14.3 Taylorreihe

Satz 3 Gegeben ist die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$ mit dem Konvergenzradius r. $I := \{x \mid |x-x_0| < r\}$. Die durch $I \to \mathbb{R}$, $x \to f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$ definierte Funktion hat die Eigenschaften:

a) $f \in C^\infty(I)$, b) $f^{(j)}(x) = \sum_{k=j}^{\infty} k(k-1)\cdots(k-j+1)\, a_k (x-x_0)^{k-j}$,

$j = 0, 1, \ldots$, $x \in I$,

c) $a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)$ $(k = 0, 1, \ldots)$,

d) $\int_{x_0}^{x} f(t)\, dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} (x-x_0)^{k+1}$.

Es sei $f \in C^\infty(I)$, $x_0 \in I$. Die Reihe

$$\lim_{n \to \infty} T_n(f, x_0)(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k =: T(f, x_0)(x)$$

heißt die Taylorreihe von f um x_0

Es gilt: Jede Potenzreihe ist die Taylorreihe der durch die Potenzreihe gegebenen Funktion f:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k =: f(x) \implies \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k = T(f, x_0)(x)$$

Beispiele: 1) $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k} = \frac{1}{1+x^2}$, $|x| < 1$

Es gelten: $\frac{1}{(2k)!} D^{2k}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)\Big|_{x=0} = (-1)^k$

$k = 0, 1, 2, \ldots$

$\frac{1}{(2k+1)!} D^{2k+1}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)\Big|_{x=0} = 0$

2) Die Binomische Reihe. Es sei $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$.

$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$ ist die Taylorreihe von $(1+x)^\alpha$ für $|x|<1$.

(*) $$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$$

Das sieht man so: Für $f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$ ist $I = \{x \mid |x|<1\}$.

Es gilt: $\begin{cases} (1+x) f'(x) = \alpha f(x), & |x|<1 \\ f(0) = 1 \end{cases}$

$\Rightarrow f(x) = (1+x)^\alpha$.

Für $\alpha = n \in \mathbb{N}$ liegt wegen $\binom{n}{k} = 0$ für $k>n$ keine Reihe vor: (*) ist der Binomische Lehrsatz aus 5.4 in diesem Fall.

14.4 Entwicklung einer Funktion in eine Potenzreihe, die dann die Taylorreihe der Funktion zum gewählten Entwicklungspunkt ist.

Satz 4 Es sei $f \in C^\infty[a,b]$ und $x_0 \in (a,b)$. Dann gilt $f(x) = T(f, x_0)(x)$ genau für die $x \in [a,b]$, für die $R_{n+1}(x) \to 0$ $(n \to \infty)$ gilt.

Dies ist z.B. dann der Fall für alle $x \in [a,b]$, wenn es Konstanten A, B so gibt, dass $|f^{(n)}(x)| \le A B^n$ für alle $x \in [a,b]$ und alle n gilt.

Z: Soll eine Funktion f um x_0 in eine Potenzreihe entwickelt werden, so kann man für $f \in C^\infty$ so vorgehen:

1) Berechne $T(f, x_0)(x)$. Berechne die x, für die $R_{n+1}(x) \to 0$ $(n \to \infty)$ gilt. Für diese x folgt

$$f(x) = T(f, x_0)(x) \qquad \boxed{(*)}.$$

Ist $f \in C^\infty(I)$, so ist der Bereich, für den $(*)$ richtig ist i.a. eine Teilmenge von I.

oder 2) Verwende bekannte Reihen wie etwa die geometrische oder die Exponential-Reihe.

Beispiele 1) Für $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, gilt:

$f \in C^\infty(\mathbb{R})$, $f^{(j)}(0) = 0 \quad \forall j$. Also

$T(f, 0)(x) = 0 \neq e^{-\frac{1}{x^2}}, x \neq 0$. f ist um 0 nicht in eine Potenzreihe entwickelbar.

2) $f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt = \sum_{k=0}^\infty (-1)^k \frac{1}{2k+1} \frac{1}{k!} x^{2k+1}$

3) $f(x) = \operatorname{Arctan} x$. Entwickle $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ in eine Reihe um 0 (14.3, Beispiel 1)). Bilde $\int_0^x$(der Reihe):

$$\operatorname{Arctan}(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = \dots$$

4) $f(x) = \ln(1+x)$ soll um 0 entwickelt werden.

Man findet leicht $\frac{1}{n!} f^{(n)}(0) = (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \dots$

$$\Rightarrow (T(\ln(1+x), 0))(x) = \sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k \quad (r = 1, |x| < 1).$$

Nach Satz 4 gilt $\sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k = \ln(1+x)$ für die x aus $-1 < x \leq 1$, für die $R_{n+1}(x) \to 0 \quad (n \to \infty)$.

Durch Abschätzen findet man leicht für $0 \leq x \leq 1$: $|R_{n+1}(x)| \leq \frac{1}{n+1} \to 0 \quad (n \to \infty)$. Durch Differentiation sieht man für $-1 < x < 1$, dass $D\left(\sum_{k=1}^\infty (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}\right) = \frac{1}{1+x}$ gilt. Also $\sum_{k=1}^\infty (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} = \ln(1+x)$ für $-1 < x < 1$, insgesamt also für $-1 < x \leq 1$.