UNIVERSITÄT KARLSRUHE
Institut für Analysis
Dr. A. Müller-Rettkowski
Dipl.-Math. M. Uhl

WS 2009/10

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Lösungsvorschläge zum 2. Übungsblatt

Aufgabe 1

a) Eine injektive Abbildung ist beispielsweise gegeben durch $f_1\colon M \to N$, $2 \mapsto 2, 4 \mapsto 4, 7 \mapsto 8$. Nicht injektiv ist etwa $f_2\colon M \to N$, $2 \mapsto 2, 4 \mapsto 2, 7 \mapsto 8$. Beide Abbildungen sind nicht surjektiv. Surjektive Abbildungen und damit auch bijektive Abbildungen von M nach N gibt es nicht, weil N mehr Elemente als M enthält.

Aus dem gleichen Grund existiert keine injektive Abbildung von N nach M. Ist beispielsweise $g_1\colon N \to M$, $2 \mapsto 2, 4 \mapsto 2, 8 \mapsto 2$ und $9 \mapsto 7$, so ist g_1 nicht surjektiv. Definiert man z.B. $g_2\colon N \to M$ durch $2 \mapsto 2, 4 \mapsto 2$, $8 \mapsto 4$ und $9 \mapsto 7$, dann ist g_2 surjektiv.

b) f ist injektiv, denn für alle $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$ gilt

$$\begin{aligned} f(x) = f(y) \quad &\Rightarrow \quad \frac{x+4}{x-3} = \frac{y+4}{y-3} \\ &\Rightarrow \quad (x+4)(y-3) = (y+4)(x-3) \\ &\Rightarrow \quad xy - 3x + 4y - 12 = yx - 3y + 4x - 12 \\ &\Rightarrow \quad 7y = 7x \quad \Rightarrow \quad x = y. \end{aligned}$$

f ist nicht surjektiv, denn $1 \notin f(\mathbb{R} \setminus \{3\})$. Für jedes $x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$ gilt nämlich

$$f(x) = \frac{x-3+3+4}{x-3} = 1 + \frac{7}{x-3}\,.$$

Wegen $\frac{7}{x-3} \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$ folgt $f(x) \neq 1$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$. Also gibt es kein $x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$ mit $f(x) = 1$, d.h. $1 \notin f(\mathbb{R} \setminus \{3\})$.

Aufgabe 2

a) f_1 ist injektiv, denn für alle $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ gilt

$$f_1(x) = f_1(y) \quad \Rightarrow \quad x = y\,.$$

f_1 ist auch surjektiv. Um dies zu begründen, müssen wir zeigen, dass es zu jedem $y \in \mathbb{R}\setminus\{0, 1\}$ ein $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ gibt mit $f_1(x) = y$. Sei $y \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. Ist $x := y \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ gesetzt, so gilt $f_1(x) = y$.

Da f_1 sowohl injektiv als auch surjektiv ist, ist f_1 bijektiv. Daher existiert die Umkehrfunktion $f_1^{-1}\colon \mathbb{R}\setminus\{0, 1\} \to \mathbb{R}\setminus\{0, 1\}$ von f_1. Zur Berechnung von f_1^{-1} lösen wir die Gleichung $f_1(x) = y$ nach x auf (hier sind $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}, y \in f_1(\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}) = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$): $f_1(x) = y \;\Leftrightarrow\; x = y$. Also ist $f_1^{-1}\colon \mathbb{R} \setminus \{0, 1\} \to \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, $f_1^{-1}(y) = y$.

Für jedes $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ gilt

$$f_2(x) = 1 + \frac{x}{1-x} = \frac{1-x+x}{1-x} = \frac{1}{1-x}\,.$$

f_2 ist injektiv, denn für alle $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ ergibt sich

$$x \neq y \quad \Rightarrow \quad x - 1 \neq y - 1 \quad \overset{x,y\neq 1}{\Rightarrow} \quad \frac{1}{x-1} \neq \frac{1}{y-1} \quad \Rightarrow \quad f_2(x) \neq f_2(y)\,.$$

f_2 ist auch surjektiv: Sei $y \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$. Für $x := 1 - \frac{1}{y} \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$ gilt

$$f_2(x) = \frac{1}{1-(1-\frac{1}{y})} = \frac{1}{1-1+\frac{1}{y}} = y\,.$$

Insgesamt haben wir gezeigt, dass f_2 bijektiv ist und daher die Umkehrfunktion f_2^{-1} existiert. Dem Beweis der Surjektivität von f_2 entnehmen wir $f_2^{-1}\colon \mathbb{R}\setminus\{0,1\} \to \mathbb{R}\setminus\{0,1\}$, $f_2^{-1}(y) = 1-\frac{1}{y}$.

Für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$ gilt $f_3(x) = 1 - \frac{1}{x} = f_2^{-1}(x)$. Also sind f_3 und f_2^{-1} identisch. Da f_2^{-1} bijektiv ist, gilt das selbe auch für f_3. Außerdem ergibt sich $f_3^{-1} = f_2$.

b) Da f_1 die Identität auf $\mathbb{R} \setminus \{0,1\}$ ist, gilt $f_1 \circ f_k = f_k$ für alle $k \in \{1,2,3\}$ und $f_j \circ f_1 = f_j$ für alle $j \in \{1,2,3\}$. Ferner erhalten wir wegen $f_2 = f_3^{-1}$ und $f_3 = f_2^{-1}$ für jedes $x \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$

$$\begin{aligned}(f_3 \circ f_2)(x) &= f_3(f_2(x)) = f_3(f_3^{-1}(x)) = x = f_1(x)\,,\\ (f_2 \circ f_3)(x) &= f_2(f_3(x)) = f_2(f_2^{-1}(x)) = x = f_1(x)\,,\end{aligned}$$

d.h. $f_3 \circ f_2 = f_1$ und $f_2 \circ f_3 = f_1$. Überdies erkennen wir für jedes $x \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$

$$\begin{aligned}(f_2 \circ f_2)(x) &= f_2(f_2(x)) = \frac{1}{1-f_2(x)} = \frac{1}{1-\frac{1}{1-x}} = \frac{1-x}{1-x-1} = \frac{x-1}{x} = 1 - \frac{1}{x} = f_3(x)\,,\\ (f_3 \circ f_3)(x) &= f_3(f_3(x)) = 1 - \frac{1}{f_3(x)} = 1 - \frac{1}{1-\frac{1}{x}} = 1 - \frac{x}{x-1} = \frac{x-1-x}{x-1} = \frac{1}{1-x} = f_2(x)\,,\end{aligned}$$

d.h. $f_2 \circ f_2 = f_3$ und $f_3 \circ f_3 = f_2$.

Bemerkung für Hörer der Ergänzungen für Studierende der Physik: Wir haben gezeigt, dass $(\{f_1, f_2, f_3\}, \circ)$ eine abelsche Gruppe ist.

Aufgabe 3

a) Zuerst begründen wir, dass f tatsächlich nach $[a,b]$ abbildet. Für jedes $x \in [0,1]$ gilt

$$f(x) = xb + (1-x)a = a + x\underbrace{(b-a)}_{>0} \begin{cases} \leqslant a + 1\cdot(b-a) = b \\ \geqslant a + 0\cdot(b-a) = a \end{cases}$$

Also ist $f(x) \in [a,b]$ für alle $x \in [0,1]$.

f ist injektiv, denn für alle $x, y \in [0,1]$ gilt

$$\begin{aligned} f(x) = f(y) \quad &\Rightarrow \quad xb + (1-x)a = yb + (1-y)a \\ &\Rightarrow \quad xb + a - xa = yb + a - ya \\ &\Rightarrow \quad x(b-a) = y(b-a) \\ &\overset{a\neq b}{\Rightarrow} \quad x = y\,. \end{aligned}$$

f ist surjektiv: Sei $y \in [a,b]$. Zum Nachweis der Surjektivität von f müssen wir ein $x \in [0,1]$ angeben mit $f(x) = y$. Definiere $x := \frac{y-a}{b-a}$. Wegen

$$a \leqslant y \leqslant b \quad \Rightarrow \quad 0 \leqslant y - a \leqslant b - a \quad \overset{b-a>0}{\Rightarrow} \quad 0 \leqslant \frac{y-a}{b-a} \leqslant 1$$

ist $x \in [0,1]$. Ferner gilt für dieses x

$$f(x) = xb + (1-x)a = x(b-a) + a = \frac{y-a}{b-a}(b-a) + a = y - a + a = y\,.$$

Da $y \in [a,b]$ beliebig war, folgt $f([0,1]) = [a,b]$, d.h. die Surjektivität von f.

Außerdem haben wir eben die Umkehrfunktion von f bestimmt. Diese lautet

$$f^{-1}\colon [a,b] \to [0,1], \quad f^{-1}(y) := \frac{y-a}{b-a}\,.$$

b) Wir gehen schrittweise vor. Zunächst suchen wir eine Funktion, die das Intervall $[c, d]$ auf $[0, 1]$ bijektiv abbildet. Laut **a)** ist $g\colon [0, 1] \to [c, d]$, $g(x) := xd + (1 - x)c$ bijektiv. Folglich leistet $g^{-1}\colon [c, d] \to [0, 1]$, $g^{-1}(y) \overset{\textbf{a)}}{:=} \frac{y-c}{d-c}$ das Gewünschte.

Im **a)**-Teil sahen wir, dass $f\colon [0, 1] \to [a, b]$, $f(x) := xb + (1 - x)a = x(b - a) + a$ bijektiv ist. Da die Komposition bijektiver Funktionen wieder bijektiv ist, ist $f \circ g^{-1}$ eine Funktion, die das Intervall $[c, d]$ auf $[a, b]$ bijektiv abbildet. Für jedes $y \in [c, d]$ gilt

$$f \circ g^{-1}(y) = f(g^{-1}(y)) = f(\frac{y-c}{d-c}) = \frac{y-c}{d-c}\,(b-a) + a\,.$$

Aufgabe 4

a) Wegen

$$|x+1| = \begin{cases} x+1 & \text{für } x+1 \geqslant 0 \\ -(x+1) & \text{für } x+1 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x+1 & \text{für } x \geqslant -1 \\ -x-1 & \text{für } x < -1 \end{cases}$$

und

$$|x-4| = \begin{cases} x-4 & \text{für } x-4 \geqslant 0 \\ -(x-4) & \text{für } x-4 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x-4 & \text{für } x \geqslant 4 \\ -x+4 & \text{für } x < 4 \end{cases}$$

führen wir die Fallunterscheidung $x \in (-\infty, -1)$, $x \in [-1, 4)$, $x \in [4, \infty)$ durch, um die Beträge aufzulösen.

1. Fall: $x \in (-\infty, -1)$. Es gilt

$$|x-4| = |x+1| \quad\Leftrightarrow\quad -(x-4) = -(x+1) \quad\Leftrightarrow\quad -x+4 = -x-1 \quad\Leftrightarrow\quad 4 = -1.$$

Dies ist falsch. Daher ist die gegebene Gleichung für kein $x \in (-\infty, -1)$ erfüllt.

2. Fall: $x \in [-1, 4)$. Es gilt

$$\begin{aligned} |x-4| = |x+1| \quad&\Leftrightarrow\quad -(x-4) = x+1 \quad\Leftrightarrow\quad -x+4 = x+1 \\ &\Leftrightarrow\quad -2x = -3 \quad\Leftrightarrow\quad x = 3/2. \end{aligned}$$

In diesem Fall ist die gegebene Gleichung genau für $x = 3/2 \in [-1, 4)$ erfüllt. [Hierbei ist zu beachten, dass man $3/2 \in [-1, 4)$ prüfen muss. Andernfalls würde man die Zahl $3/2$ in diesem Fall nicht betrachten und könnte nicht folgern, dass $3/2$ die gegebene Gleichung erfüllt.]

3. Fall: $x \in [4, \infty)$. Es gilt

$$|x-4| = |x+1| \quad\Leftrightarrow\quad x-4 = x+1 \quad\Leftrightarrow\quad -4 = 1.$$

Dies ist falsch. Daher ist die gegebene Gleichung für kein $x \in [4, \infty)$ erfüllt.

Fazit: $|x-4| = |x+1| \;\Leftrightarrow\; x = 3/2$.

Alternativ führen auch geometrische Überlegungen zum Ziel: Gesucht sind diejenigen $x \in \mathbb{R}$, die denselben Abstand zu 4 wie zu -1 haben, d.h. x liegt genau in der Mitte: $x = \frac{4+(-1)}{2} = \frac{3}{2}$.

b) $|2x| > |5 - 2x|$ besagt, dass notwendig $x \neq 0$ sein muss. Für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt aber

$$\begin{aligned} |2x| > |5-2x| \quad&\Leftrightarrow\quad \left|\frac{5-2x}{2x}\right| < 1 \quad\Leftrightarrow\quad -1 < \underbrace{\frac{5-2x}{2x}}_{=\frac{5}{2x}-1} < 1 \quad\Leftrightarrow\quad 0 < \frac{5}{2x} < 2 \\ &\Leftrightarrow\quad \frac{2}{5}\,x > \frac{1}{2} \quad\Leftrightarrow\quad x > \frac{5}{4}. \end{aligned}$$

c) Es ist

$$\begin{aligned} &|2 - |2-x|| \leqslant 1 \quad\Leftrightarrow\quad -1 \leqslant 2 - |2-x| \leqslant 1 \quad\Leftrightarrow\quad -3 \leqslant -|2-x| \leqslant -1 \\ \Leftrightarrow\quad &1 \leqslant |2-x| \leqslant 3 \quad\Leftrightarrow\quad 1 \leqslant 2-x \leqslant 3 \;\text{ oder }\; 1 \leqslant -(2-x) \leqslant 3 \\ \Leftrightarrow\quad &1 \leqslant 2-x \leqslant 3 \;\text{ oder }\; -3 \leqslant 2-x \leqslant -1 \quad\Leftrightarrow\quad -1 \leqslant -x \leqslant 1 \;\text{ oder }\; -5 \leqslant -x \leqslant -3 \\ \Leftrightarrow\quad &-1 \leqslant x \leqslant 1 \quad\text{oder}\quad 3 \leqslant x \leqslant 5 \quad\Leftrightarrow\quad x \in [-1, 1] \cup [3, 5]. \end{aligned}$$

d) Wir unterscheiden drei Fälle:

1. Fall: $x \in (-\infty, -1)$. Mit $|x+1| = -(x+1)$ und $|x-1| = -(x-1)$ ergibt sich

$$|x+1| + |x-1| = -2x.$$

Deshalb gilt

$$|x+1| + |x-1| > 2 \quad \Leftrightarrow \quad -2x > 2 \quad \Leftrightarrow \quad x < -1.$$

2. Fall: $x \in [-1, 1)$. Hier ist $|x+1| = x+1$ und $|x-1| = -(x-1)$, also

$$|x+1| + |x-1| = 2.$$

Demzufolge lautet in diesem Fall die Ungleichung: $2 > 2$. Diese ist unlösbar.

3. Fall: $x \in [1, \infty)$. Wegen $|x+1| = x+1$ und $|x-1| = x-1$ folgt

$$|x+1| + |x-1| = 2x$$

und damit

$$|x+1| + |x-1| > 2 \quad \Leftrightarrow \quad 2x > 2 \quad \Leftrightarrow \quad x > 1.$$

Zusammenfassend haben wir:

$$|x+1| + |x-1| > 2 \quad \Leftrightarrow \quad x < -1 \text{ oder } x > 1 \quad \Leftrightarrow \quad x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty).$$

e) Wir führen eine Fallunterscheidung durch.

1. Fall: $x < 0$. Dann ist $|x| = -x$, und es gilt

$$\begin{aligned}
\frac{3x}{1+|x|} < 4x^2 \quad &\Leftrightarrow \quad 3x < 4x^2(1-x) \quad \Leftrightarrow \quad 0 < -4x^3 + 4x^2 - 3x \\
&\Leftrightarrow \quad 0 < -4x\Big(x^2 - x + \frac{3}{4}\Big) \quad \Leftrightarrow \quad 0 < -4x\underbrace{\Big[\Big(x - \frac{1}{2}\Big)^2 + \frac{1}{2}\Big]}_{\geqslant \frac{1}{2} > 0} \\
&\Leftrightarrow \quad 0 < -4x \quad \Leftrightarrow \quad x < 0.
\end{aligned}$$

2. Fall: $x \geqslant 0$. Dann ist $|x| = x$, und es gilt

$$\begin{aligned}
\frac{3x}{1+|x|} < 4x^2 \quad &\Leftrightarrow \quad 3x < 4x^2(1+x) \quad \Leftrightarrow \quad 0 < 4x^3 + 4x^2 - 3x \\
&\Leftrightarrow \quad 0 < 4x\Big(x^2 + x - \frac{3}{4}\Big) \quad \Leftrightarrow \quad 0 < 4x\Big[\Big(x + \frac{1}{2}\Big)^2 - 1\Big] \\
&\overset{x \geqslant 0}{\Leftrightarrow} \quad 4x > 0 \text{ und } \Big(x + \frac{1}{2}\Big)^2 - 1 > 0 \\
&\Leftrightarrow \quad x > 0 \text{ und } \Big|x + \frac{1}{2}\Big| > 1 \\
&\Leftrightarrow \quad x > 0 \text{ und } \Big(x + \frac{1}{2} > 1 \text{ oder } -(x + \frac{1}{2}) > 1\Big) \\
&\Leftrightarrow \quad x > 0 \text{ und } \Big(x + \frac{1}{2} > 1 \text{ oder } x + \frac{1}{2} < -1\Big) \\
&\Leftrightarrow \quad x > 0 \text{ und } \Big(x > \frac{1}{2} \text{ oder } x < -\frac{3}{2}\Big) \\
&\Leftrightarrow \quad x > \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Demzufolge gilt $\frac{3x}{1+|x|} < 4x^2$ genau für $x \in \mathbb{R}$ mit $x < 0$ oder $x > \frac{1}{2}$.

f) Auf keinen Fall kommt $x = 1$ in Frage, denn die Division durch 0 ist nicht definiert. Ansonsten multiplizieren wir die Ungleichung mit $1 - x$. Dabei müssen wir zwei Fälle unterscheiden:

1. Fall: Sei zunächst $1 - x > 0$, also $x < 1$. Multiplikation mit $1 - x$ liefert

$$\begin{aligned} 2x + \frac{1}{1-x} \geqslant 1 \quad &\Leftrightarrow \quad 2x(1-x) + 1 \geqslant 1 - x \quad \Leftrightarrow \quad 2x - 2x^2 + 1 \geqslant 1 - x \\ &\Leftrightarrow \quad 3x - 2x^2 \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad x(3-2x) \geqslant 0. \end{aligned}$$

Die letzte Ungleichung gilt genau dann, wenn $x \geqslant 0$ und $3 - 2x \geqslant 0$ oder aber wenn $x \leqslant 0$ und $3 - 2x \leqslant 0$ sind.

$x \geqslant 0$ und $3 - 2x \geqslant 0$ bedeutet $x \geqslant 0$ und $x \leqslant 3/2$, also $0 \leqslant x \leqslant 3/2$. Da wir im 1. Fall nur $x < 1$ betrachten, ergibt sich also $0 \leqslant x < 1$.

$x \leqslant 0$ und $3 - 2x \leqslant 0$ bedeutet $x \leqslant 0$ und $x \geqslant 3/2$, was nicht gleichzeitig möglich ist.

2. Fall: Jetzt sei $1 - x < 0$, also $x > 1$. Dann dreht sich bei Multiplikation mit $1 - x$ das $\geqslant$ um, und wir erhalten

$$2x + \frac{1}{1-x} \geqslant 1 \quad \Leftrightarrow \quad 2x(1-x) + 1 \leqslant 1 - x \quad \Leftrightarrow \quad x(3-2x) \leqslant 0.$$

Diese Ungleichung gilt genau dann, wenn $x \geqslant 0$ und $3 - 2x \leqslant 0$ oder aber wenn $x \leqslant 0$ und $3 - 2x \geqslant 0$ sind.

$x \geqslant 0$ und $3 - 2x \leqslant 0$ bedeutet $x \geqslant 0$ und $x \geqslant 3/2$, also $x \geqslant 3/2$.

$x \leqslant 0$ und $3 - 2x \geqslant 0$ bedeutet $x \leqslant 0$ und $x \leqslant 3/2$, also $x \leqslant 0$. Da wir im 2. Fall nur $x > 1$ betrachten, ist dies hier nicht möglich.

Insgesamt: Die Ungleichung ist genau dann erfüllt, wenn $0 \leqslant x < 1$ oder $x \geqslant 3/2$.

Aufgabe 5

Seien $x, y \in \mathbb{R}$ beliebig. Wir betrachten die beiden Fälle $x - y \geqslant 0$ und $x - y < 0$.
1. Fall: $x \geqslant y$. Dann ist $|x - y| = x - y$, und es gilt

$$\begin{aligned} \frac{x + y + |x-y|}{2} &= \frac{x + y + x - y}{2} = \frac{2x}{2} = x = \max\{x, y\}, \\ \frac{x + y - |x-y|}{2} &= \frac{x + y - (x - y)}{2} = \frac{2y}{2} = y = \min\{x, y\}. \end{aligned}$$

2. Fall: $x < y$. Dann ist $|x - y| = -(x - y) = -x + y$, und es gilt

$$\begin{aligned} \frac{x + y + |x-y|}{2} &= \frac{x + y - x + y}{2} = \frac{2y}{2} = y = \max\{x, y\}, \\ \frac{x + y - |x-y|}{2} &= \frac{x + y + x - y}{2} = \frac{2x}{2} = x = \min\{x, y\}. \end{aligned}$$

Aufgabe 6

a) Wir müssen zeigen, dass $\chi_{A \cap B}(x) = \chi_A(x) \cdot \chi_B(x)$ für alle $x \in X$ gilt. Sei dazu $x \in X$ beliebig.

Fall 1: $x \in A \cap B$. Dies bedeutet $x \in A$ und $x \in B$. Nach Definition der charakteristischen Funktion ist dann $\chi_{A \cap B}(x) = 1$ und $\chi_A(x) \cdot \chi_B(x) = 1 \cdot 1 = 1$; damit ist in diesem Falle die Gleichheit bewiesen.

Fall 2: $x \notin A \cap B$. Dann muss $x \notin A$ oder $x \notin B$ gelten. Somit ist $\chi_A(x) = 0$ oder $\chi_B(x) = 0$, d. h. das Produkt $\chi_A(x) \cdot \chi_B(x)$ ergibt auf jeden Fall 0. Dies stimmt überein mit $\chi_{A \cap B}(x) = 0$.

Bemerkung: Eine andere Darstellung ist $\chi_{A \cap B}(x) = \min\{\chi_A(x), \chi_B(x)\}$ für jedes $x \in X$.

b) Nach Definition der charakteristischen Funktion gilt für jedes $x \in X$

$$\chi_{C_X(A)}(x) = \begin{cases} 1, & x \in C_X(A) \\ 0, & x \in C_X(C_X(A)) = A \end{cases} = \begin{cases} 1-0, & x \in C_X(A) \\ 1-1, & x \in A \end{cases} = 1 - \chi_A(x).$$

Unser erstes Ergebnis lautet also: $\chi_{C_X(A)} = 1 - \chi_A$.

Mit $A \setminus B = \{\, x \mid x \in A \wedge x \notin B \,\} = A \cap C_X(B)$ und **a)** ergibt sich $\chi_{A\setminus B} = \chi_A \cdot \chi_{C_X(B)}$, also wegen des gerade Bewiesenen $\chi_{A\setminus B} = \chi_A \cdot (1 - \chi_B)$.

Nun zu $\chi_{A\cup B}$: Wir schreiben $A \cup B = C_X(C_X A \cap C_X B)$ und erhalten nach dem zuvor Bewiesenen

$$\begin{aligned} \chi_{A\cup B} &= \chi_{C_X(C_X A \cap C_X B)} = 1 - \chi_{C_X A \cap C_X B} = 1 - \chi_{C_X A} \cdot \chi_{C_X B} \\ &= 1 - (1-\chi_A)(1-\chi_B) = \chi_A + \chi_B - \chi_A \cdot \chi_B. \end{aligned}$$

Alternativ: Wir betrachten zunächst den Spezialfall, dass A und B disjunkt sind, und zeigen $\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B$. Sei dazu $x \in X$.
Fall 1: $x \in A \cup B$. Nach Definition ist dann $\chi_{A\cup B}(x) = 1$. Da x in A oder B, nicht jedoch in beiden Mengen liegt [Würde x sowohl in A als auch in B liegen, so wäre $A \cap B \neq \emptyset$ im Widerspruch zur Disjunktheit von A und B.], ergibt sich $\chi_A(x) + \chi_B(x) = 1$.
Fall 2: $x \notin A \cup B$, d.h. $x \notin A$ und $x \notin B$. Dann ist $\chi_{A\cup B}(x) = 0 = 0 + 0 = \chi_A(x) + \chi_B(x)$.
Nun zum allgemeinen Fall: Wir schreiben $A \cup B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B)$ und stellen fest, dass $A \setminus B, B \setminus A, A \cap B$ paarweise disjunkte Mengen sind. Daher erhalten wir nach dem eben Bewiesenen

$$\begin{aligned} \chi_{A\cup B} &= \chi_{[(A\setminus B)\cup(B\setminus A)]\cup(A\cap B)} = \chi_{(A\setminus B)\cup(B\setminus A)} + \chi_{A\cap B} = \chi_{A\setminus B} + \chi_{B\setminus A} + \chi_{A\cap B} \\ &= \chi_A \cdot (1-\chi_B) + \chi_B \cdot (1-\chi_A) + \chi_A \cdot \chi_B = \chi_A + \chi_B - \chi_A \cdot \chi_B. \end{aligned}$$

Bemerkung: Eine andere Darstellung ist $\chi_{A\cup B}(x) = \max\{\chi_A(x), \chi_B(x)\}$ für jedes $x \in X$.

Aufgabe 7

a) A sei eine beliebige Teilmenge von X. Sei $a \in A$. Dann ist $f(a) \in f(A)$. Gemäß Definition gilt für die Urbildmenge $f^{-1}(f(A)) = \{x \in X \mid f(x) \in f(A)\}$. Da $f(a)$ in $f(A)$ liegt, ergibt sich $a \in f^{-1}(f(A))$. Also ist $A \subset f^{-1}(f(A))$.

Nun sei f zusätzlich injektiv. Um $A = f^{-1}(f(A))$ zu zeigen, müssen wir noch $f^{-1}(f(A)) \subset A$ begründen:

Sei dazu $x \in f^{-1}(f(A))$. Annahme: $x \in X \setminus A$.

Wegen $x \in f^{-1}(f(A)) = \{z \in X \mid f(z) \in f(A)\}$ gilt $f(x) \in f(A)$. Deshalb gibt es $x' \in A$ mit $f(x') = f(x)$. Außerdem haben wir $x \neq x'$, weil $x \notin A$ und $x' \in A$ sind. Folglich ist f nicht injektiv. Widerspruch! Also gilt $x \in A$. Hiermit ist $f^{-1}(f(A)) \subset A$ gezeigt.

b) Sei $B \subset Y$ und $y \in f(f^{-1}(B))$. Dann existiert ein $z \in f^{-1}(B)$ mit $y = f(z)$. Wegen $f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$ ist $f(z)$ in B und damit auch y in B enthalten.

Bemerkung: Ist f surjektiv, so gilt $f(f^{-1}(B)) = B$ für alle $B \subset Y$.
Beweis: Sei $B \subset Y$. Zu zeigen ist $B \subset f(f^{-1}(B))$.
Sei dazu $y \in B$. Da f surjektiv ist, existiert ein $x_0 \in X$ mit $f(x_0) = y$. Wegen $y \in B$ ist $f(x_0) \in B$ und damit $x_0 \in \{x \in X \mid f(x) \in B\} = f^{-1}(B)$. Also gilt $y = f(x_0) \in f(f^{-1}(B))$. Da $y \in B$ beliebig war, folgt $B \subset f(f^{-1}(B))$.

Aufgabe 8 (P)

a) Kommutativgesetz: Zeige: $(x_1, x_2) * (y_1, y_2) = (y_1, y_2) * (x_1, x_2)$ für alle $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$.
Für alle $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ haben wir

$$\begin{aligned}(x_1, x_2) * (y_1, y_2) &= (x_1y_1 - x_2y_2, x_1y_2 + x_2y_1) = (y_1x_1 - y_2x_2, y_1x_2 + y_2x_1)\\ &= (y_1, y_2) * (x_1, x_2),\end{aligned}$$

also genügt $* : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dem Kommutativgesetz.

Assoziativgesetz: Zu zeigen ist: $(x_1, x_2) * \big[(y_1, y_2) * (z_1, z_2)\big] = \big[(x_1, x_2) * (y_1, y_2)\big] * (z_1, z_2)$ für alle $(x_1, x_2), (y_1, y_2), (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2$.
Wir formen zunächst die linke Seite um: Für $(x_1, x_2), (y_1, y_2), (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$\begin{aligned}&(x_1, x_2) * \big[(y_1, y_2) * (z_1, z_2)\big] = (x_1, x_2) * \big[(y_1z_1 - y_2z_2, y_1z_2 + y_2z_1)\big]\\ &= \big(x_1(y_1z_1 - y_2z_2) - x_2(y_1z_2 + y_2z_1), x_1(y_1z_2 + y_2z_1) + x_2(y_1z_1 - y_2z_2)\big)\\ &= \big(x_1y_1z_1 - x_1y_2z_2 - x_2y_1z_2 - x_2y_2z_1, x_1y_1z_2 + x_1y_2z_1 + x_2y_1z_1 - x_2y_2z_2\big).\end{aligned}$$

Und nun zur rechten Seite

$$\begin{aligned}&\big[(x_1, x_2) * (y_1, y_2)\big] * (z_1, z_2) = \big[(x_1y_1 - x_2y_2, x_1y_2 + x_2y_1)\big] * (z_1, z_2)\\ &= \big((x_1y_1 - x_2y_2)z_1 - (x_1y_2 + x_2y_1)z_2, (x_1y_1 - x_2y_2)z_2 + (x_1y_2 + x_2y_1)z_1\big)\\ &= \big(x_1y_1z_1 - x_2y_2z_1 - x_1y_2z_2 - x_2y_1z_2, x_1y_1z_2 - x_2y_2z_2 + x_1y_2z_1 + x_2y_1z_1\big).\end{aligned}$$

Ein Vergleich von rechter und linker Seite unter Berücksichtigung des Kommutativgesetzes von $+$ zeigt, dass beide Seiten gleich sind. Also genügt $* : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dem Assoziativgesetz.

b) Gesucht ist $(e_1, e_2) \in \mathbb{R}^2$ so, dass $(x_1, x_2) * (e_1, e_2) = (x_1, x_2)$ für alle $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ erfüllt ist:

$$(x_1e_1 - x_2e_2, x_1e_2 + x_2e_1) = (x_1, x_2),$$

d.h. es soll für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}x_1e_1 - x_2e_2 &= x_1\\ x_1e_2 + x_2e_1 &= x_2\end{aligned}$$

gelten. Koeffizientenvergleich liefert $e_1 = 1$ und $e_2 = 0$, also ist $(e_1, e_2) = (1, 0)$ das neutrale Element bzgl. $*$.

c) Gesucht ist für jedes $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, für die das möglich ist, das zugehörige inverse Element $(x_1, x_2)^{-1}$ bzgl. der Verknüpfung $*$, d.h. es soll $(x_1, x_2) * (x_1, x_2)^{-1} = (1, 0) = (e_1, e_2)$ gelten. Wir schreiben $(y_1, y_2) := (x_1, x_2)^{-1}$.

$$(x_1, x_2) * (y_1, y_2) = (1, 0) \quad \Leftrightarrow \quad (x_1y_1 - x_2y_2, x_1y_2 + x_2y_1) = (1, 0)$$

gilt genau dann, wenn

$$x_1y_1 - x_2y_2 = 1 \tag{1}$$
$$x_1y_2 + x_2y_1 = 0 \tag{2}$$

gelten. Um y_1, y_2 zu bestimmen, betrachten wir zunächst den Fall $x_1 \neq 0$ und $x_2 \neq 0$. Dann können wir die Gleichung (1) mit x_1 bzw. (2) mit x_2 multiplizieren und die resultierenden Gleichungen addieren:

$$x_1^2y_1 + x_2^2y_1 = x_1 \quad \Leftrightarrow \quad (x_1^2 + x_2^2)y_1 = x_1 \quad \Leftrightarrow \quad y_1 = \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2}.$$

Setzen wir dies in (2) ein, so erhalten wir

$$x_1 y_2 + x_2 \cdot \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y_2 = -\frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2}.$$

Sind $x_1 = 0$ und $x_2 \neq 0$, dann lauten (1) und (2)

$$\begin{aligned} -x_2 y_2 = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad y_2 = -\frac{1}{x_2} = -\frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2}, \\ x_2 y_1 = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad y_1 = 0 = \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2}. \end{aligned}$$

Sind $x_1 \neq 0$ und $x_2 = 0$, dann lauten (1) und (2)

$$\begin{aligned} x_1 y_1 = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad y_1 = \frac{1}{x_1} = \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2}, \\ x_1 y_2 = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad y_2 = 0 = -\frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2}. \end{aligned}$$

Das Element $(x_1, x_2) = (0, 0)$ besitzt kein Inverses, weil (1) nie erfüllt werden kann.

Folglich ist für alle $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ das jeweils zugehörige inverse Element bzgl. der Verknüpfung $*$ gegeben durch

$$(x_1, x_2)^{-1} = \Big(\frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2}, -\frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2} \Big).$$

Bemerkungen: (1) Bei der Bestimmung des Einselements im **b)**-Teil genügte es, nur $(x_1, x_2) * (e_1, e_2) = (x_1, x_2)$ für alle $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ zu fordern, weil $*\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ laut **a)** kommutativ ist. Darum ist mit $(x_1, x_2) * (e_1, e_2) = (x_1, x_2)$ auch $(e_1, e_2) * (x_1, x_2) = (x_1, x_2)$ für alle $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ erfüllt. Aus dem gleichen Grunde mussten wir in **c)** nur $(x_1, x_2) * (x_1, x_2)^{-1} = (e_1, e_2)$ und nicht auch $(x_1, x_2)^{-1} * (x_1, x_2) = (e_1, e_2)$ fordern.

(2) In dieser Aufgabe haben wir gezeigt, dass $(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, *)$ eine abelsche Gruppe ist (vgl. Multiplikation in $\mathbb{C}$).