Analysis 1 WS 18/19

Lösungen Klausur 26.03.2019

Aufgabe 1:

(i) Für welche $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 2$ gilt
$$\frac{1}{|x-2|} > \frac{1}{1+|x-1|}.$$

(ii) Berechnen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$: $\sum_{l=1}^{n}(2l-1)$

Lösungsvorschlag:

(i) Der Hauptnenner $|x-2|(1+|x-1|)$ ist für alle $x \neq 2$ positiv. Daher kann man die Ungleichung ohne Fallunterscheidung mit dem Hauptnenner multiplizieren und erhält

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|x-2|} > \frac{1}{1+|x-1|} &\iff 1+|x-1| > |x-2| \\
&\iff (1+|x-1|)^2 > |x-2|^2 = (x-2)^2 \\
&\iff 1+2|x-1| + (x^2-2x+1) > x^2-4x+4 \\
&\iff 2|x-1| = 2|1-x| > 2-2x = 2(1-x) \\
&\iff |1-x| > 1-x \\
&\iff 1-x < 0 \\
&\iff x > 1
\end{aligned}$$

Somit gilt die Ungleichung $\frac{1}{|x-2|} > \frac{1}{1+|x-1|}$ für die reellen Zahlen
$$\{x \in \mathbb{R} : x > 1, x \neq 2\}.$$

(ii) Aus den Übungen ist bekannt, dass $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$. Somit erhält man
$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = 2\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} 1 = 2\frac{n(n+1)}{2} - n = n^2.$$

Eine andere Möglichkeit dies zu beweisen ist per vollständiger Induktion:
Induktionsanfang: $(n=1)$: $\sum_{k=1}^{1}(2k-1) = 1^2$.
Induktionsvoraussetzung: Es gelte $\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$ für ein beliebiges aber festes $n \in \mathbb{N}$.
Induktionsschluss: $(n \to n+1)$:
$$\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1) = 2n+1+\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = 2n+1+n^2 = (n+1)^2.$$

Aufgabe 2: Sei $(a_n)_n$ eine beliebige reelle Folge mit $a_n < 2$ und $a_{n+1}(2-a_n) > 1$. Untersuchen Sie die gegebene Folge auf Konvergenz und geben sie im Falle der Konvergenz den Grenzwert an.

Beweis. Wenn die Folge konvergiert, z.B. gegen $a := \lim_{n\to\infty} a_n$, dann konvergiert nach den Rechenregeln für konvergente Folgen
$$a_{n+1}(2-a_n) \to a(2-a).$$

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt per Voraussetzung, dass
$$a_{n+1}(2-a_n) > 1.$$

Somit folgt wiederrum aus den Rechenregeln für konvergente Folgen, dass $a(2-a) \geq 1$ gelten muss. Man rechnet nun nach, dass die einzige Lösung dieser Ungleichung $a = 1$ ist.

$$\begin{aligned}
a(2-a) > 1 \iff 2-a \geq \frac{1}{a} \iff 2 \geq \frac{1}{a} + a \iff 2a &\geq 1+a^2 \\
&\iff 0 \geq 1-2a+a^2 \\
&\iff 0 \geq (1-a)^2 \\
&\iff a = 1.
\end{aligned}$$

Wir haben somit gezeigt, dass wenn die Folge $(a_n)_n$ konvergiert, so konvergiert sie gegen 1.
Es bleibt zu zeigen, dass die Folge konvergiert:
Nach Voraussetzung gilt $a_n < 2$ und damit folgt aus $a_{n+1}(2-a_n) > 1$, dass $a_{n+1} > 0$ ist. Also ist die Folge beschränkt. Weiter gilt
$$(a_{n+1}-a_n)(2-a_n) = a_{n+1}(2-a_n) - a_n(2-a_n) > 1 - 2a_n + a_n^2 = (1-a_n)^2 \geq 0.$$

Da $(2-a_n) > 0$ folgt somit $(a_{n+1}-a_n) \geq 0$. Also ist die Folge $(a_n)_n$ monoton wachsend. Aus dem Satz über die monotone Konvergenz folgt nun, dass die Folge $(a_n)_n$ konvergent ist. □

Achtung!!!
Bitte bearbeiten Sie nur eine der folgenden Aufgaben. Je nachdem ob Sie Hörer der Analysis 1 im WS18/19 bei Professor Hundertmark oder Hörer der Analysis 1 im WS 17/18 bei Professor Plum waren. Diejenigen von Ihnen die beide Veranstaltungen gehört haben bearbeiten bitte Aufgabe 3.

Aufgabe 3:
Bestimmen Sie die Menge der $z \in \mathbb{C}$ für welche die folgenden Potenzreihen konvergieren.

(i) $\sum_n \frac{3^n\sqrt{n}}{\sqrt{n^7+1}} z^n$,

(ii) $\sum_n \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n+1}\right)^n z^{2n}$.

Alternativ Aufgabe für die Hörer Analysis 1 im WS 17/18 bei Professor Plum

Aufgabe 3':
Es sei $f_n : [1,\pi] \to \mathbb{R}$; $f_n(x) := \frac{\cos(\frac{x}{n})}{1-e^{-xn}}$.

(i) Zeigen Sie, dass $(f_n)_n$ punktweise auf $[1,\pi]$ konvergiert und geben Sie die Grenzfunktion an. Konvergiert $(f_n)_n$ auch gleichmäßig?

(ii) Berechnen Sie
$$\lim_{n\to\infty} \int_{\frac{1}{2}}^{\pi} f_n(x)\,dx.$$

Lösungsvorschlag: (Aufgabe 3)

(i) Die Potenzreihe $\sum_n \frac{3^n\sqrt{n}}{\sqrt{n^7+1}} z^n$ konvergiert genau für die $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \leq \frac{1}{3}$.
Zuerst berechnen wir den Konvergenzradius. Setzte $a_n := \frac{3^n\sqrt{n}}{\sqrt{n^7+1}}$, dann gilt einerseits

$$\sqrt[n]{|a_n|} = 3\sqrt[n]{\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n^7+1}}} \leq 3\sqrt[n]{\frac{1}{\sqrt{1}}} = 3$$

und andererseits

$$\sqrt[n]{|a_n|} \geq 3\sqrt[n]{\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n^7+n^7}}} = 3\sqrt[n]{\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt[n]{n^{\frac{7}{2}-\frac{1}{2}}}}} = 3\sqrt[n]{\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{(\sqrt[n]{n})^3}} \to 3,\ (n \to \infty).$$

Diese Abschätzung und das Einschließungskriterium zeigen, dass $\sqrt[n]{|a_n|} \to 3$ für $n \to \infty$ und damit $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 3$. Der Konvergenzradius der Potenzreihe ist also $\rho = \frac{1}{3}$.

Sei nun $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = \frac{1}{3}$. Dann haben wir

$$|a_n z^n| = a_n |z|^n = \frac{3^n\sqrt{n}}{\sqrt{n^7+1}}\frac{1}{3^n} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n^7+1}} \leq \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n^7}} = n^{\frac{1}{2}-\frac{7}{2}} = n^{-3}$$

Das heißt, in diesem Fall ist die Reihe $\sum_n n^{-3}$ eine konvergente Majorante für $\sum_n a_n z^n$. Es folgt mit dem Majorantenkriterium, dass $\sum_n a_n z^n$ für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = \frac{1}{3}$ absolut konvergiert. Insgesamt konvergiert die Potenzreihe für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \leq \frac{1}{3}$.

(ii) Die Potenzreihe $\sum_n \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n+1}\right)^n z^{2n}$ konvergiert genau für die $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < \sqrt{2}$. Sei $z \in \mathbb{C}$ beliebig. Wir wollen das Wurzelkriterium auf die Reihe anwenden. Es gilt

$$\sqrt[n]{\left|\frac{1}{2} + \frac{1}{2n+1}\right|^n |z|^{2n}} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n+1}\right)|z|^2 \to \frac{1}{2}|z|^2,\ (n \to \infty).$$

Somit konvergiert die Reihe, wenn $\frac{1}{2}|z|^2 < 1$ und divergiert, wenn $\frac{1}{2}|z|^2 > 1$. Das heißt sie konvergiert wenn $|z| < \sqrt{2}$ und divergiert, wenn $|z| > \sqrt{2}$. Der Konvergenzradius ist $\rho = \sqrt{2}$.

Sei nun $|z| = \sqrt{2}$. Dann gilt

$$\left|\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n+1}\right)^n z^{2n}\right| = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n+1}\right)^n (|z|^2)^n = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n+1}\right)^n 2^n = \left(1 + \frac{2}{2n+1}\right)^n$$

Diese Folge konvergiert nicht gegen Null, da $1 + \frac{2}{2n+1} \geq 1$. Das bedeutet die Reihe $\sum_n \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n+1}\right)^n z^{2n}$ divergiert in diesem Fall.

Lösungsvorschlag: (Aufgabe 3')
Sei $f_n : [1,\pi] \to \mathbb{R};\ f_n(x) := \frac{\cos(\frac{x}{n})}{1-e^{-xn}}$.

(i) Die Funktion $\cos : [1,\pi] \to \mathbb{R}\ \ x \mapsto \frac{x}{n}$ geht für $n \to \infty$ gegen 1. Ebenso konvergiert die Funktion $g(x) := (1 - e^{-nx})$ für $n \to \infty$ gegen 1 für alle $x \in [1,\pi]$. Somit ist die Funktionenfolge $f_n : [1,\pi] \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f_n(x) := \frac{\cos(\frac{x}{n})}{1-e^{-xn}}$ punktweise konvergent auf $[1,\pi]$. Die Funktionenfolge ist sogar gleichmäßig konvergent denn mit Hilfe der ersten Ableitung sieht man, dass sie ihr Maximum in einem der Punkte $x = 1$ oder $x = \pi$ annehmen muss.

$$\left(\frac{\cos(\frac{x}{n})}{1-e^{-xn}}\right)' = \frac{-\sin(\frac{x}{n})\frac{1}{n}(1-e^{-xn}) - \cos(\frac{x}{n})ne^{-xn}}{(1-e^{xn})^2}$$

Für alle $x \in [1,\pi]$ und $n \geq 3$ gilt $\sin(\frac{x}{n}) > 0$, $\cos(\frac{x}{n}) > 0$ und $e^{-nx} > 0$. Somit wird die obige Ableitung auf dem offenen Intervall $(1,\pi)$ nicht Null und die auf einem kompakten Intervall gegebene Funktionenfolge f_n muss ihr Maximum in einem der Randpunkte $x = 1$ oder $x = \pi$ annehmen. Nehmen wir an, dass $x = 1$ das Maximum ist:

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[1,\pi]} \left|\frac{\cos(\frac{x}{n})}{1-e^{-xn}} - 1\right| \leq \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\cos(\frac{1}{n})}{1-e^{-n}} - 1\right| \to 0$$

Ebenso erhalten wir unter der Annahme, dass $x = \pi$ das Maximum ist,

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[1,\pi]} \left|\frac{\cos(\frac{x}{n})}{1-e^{-xn}} - 1\right| \leq \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\cos(\frac{\pi}{n})}{1-e^{-\pi n}} - 1\right| \to 0$$

Somit ist f_n gleichmäßig konvergent gegen die konstante Funktion 1.

(ii) Da f_n nach (i) gleichmäßig konvergiert und für festes $n \in \mathbb{N}$ die Funktionen f_n integrierbar sind auf dem Intervall $[1,\pi]$ folgt, dass wir Integration und Grenzwertbildung vertauschen können. Wir erhalten also

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^\pi f_n(x)dx = \int_1^\pi \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = \int_1^\pi 1dx = [x]_1^\pi = \pi - 1.$$

Aufgabe 4: Untersuchen Sie ob die Funktion $\ln x : (0,\infty) \to (0,\infty)$ gleichmäßig stetig ist auf

(i) einem Intervall der Form $[a,\infty)$ mit $a > 0$,

(ii) in ganz $(0,\infty)$.

Hinweis für Studenten von Professor Plum: ln bezeichnet den natürlichen Logarithmus log.

Lösungsvorschlag:

(i) $\ln x$ ist in jedem Intervall der Form $[a,\infty)$ mit $a > 0$ gleichmäßig stetig.

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Wähle $\delta := \varepsilon a$.
Dann gilt für alle $x, y \geq a$, $|x - y| < \delta$:

$$|\ln x - \ln y| = |x - y||\ln \xi'| = |x - y|\frac{1}{\xi} < \frac{\delta}{a} = \varepsilon$$

mit einer geeigneten Zwischenstelle ξ.

Ohne den Mittelwertsatz könnte man für $a \leq y \leq x$ wie folgt abschätzen:

$$|\ln x - \ln y| = \ln\frac{x}{y} \leq \frac{x}{y} - 1 = \frac{x-y}{y} \leq \frac{|x-y|}{a} < \frac{\delta}{a} = \varepsilon.$$

□

(ii) $\ln x$ ist nicht auf ganz $(0,\infty)$ gleichmäßig stetig.

Beweis. Für die Negation der gleichmäßigen Stetigkeit ist zu zeigen, dass

$$\exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists x, y > 0 \text{ mit } |x - y| < \delta \text{ und } |\ln x - \ln y| \geq \varepsilon.$$

Sei $\varepsilon := \frac{\ln 2}{2}$ imd $\delta > 0$ beliebig vorgegeben. Wähle $x := \delta$ und $y := \frac{\delta}{2}$. Dann ist sicherlich $|x-y| < \delta$ und

$$|\ln x - \ln y| = \ln \frac{x}{x/2} = \ln 2 \geq \varepsilon .$$

□

Aufgabe 5: Sei $D \subset \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

(i) Geben Sie das Epsilon-Delta Kriterium für die Stetigkeit von f in einem Punkt $x_0 \in D$ an.

(ii) Geben Sie das Folgenkriterium für die Stetigkeit von f in einem Punkt $x_0 \in D$ an.

(iii) Zeigen Sie, dass diese beiden Kriterien äquivalent sind.

Lösungsvorschlag:

(i) Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist stetig in $x_0 \in D$ falls

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, : \, |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \;\; \forall x \in D \text{ mit } |x - x_0| < \delta .$$

(ii) Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist stetig in $x_0 \in D$ falls für jede Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $x_k \in D$ und $\lim_{k\to\infty} x_k = x_0$ folgt

$$\lim_{k\to\infty} f(x_k) = f(x_0) .$$

(iii) *Beweis.* $(i) \Rightarrow (ii)$: Sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ Folge mit $x_k \in D$ und $\lim_{k\to\infty} x_k = x_0$. Per Voraussetzung existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ so dass $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ für alle $x \in D$ mit $|x - x_0| < \delta$.

$$\implies |f(x_k) - f(x_0)| < \varepsilon \qquad \text{für fast alle } k \in \mathbb{N}$$
$$\implies \lim_{k\to\infty} |f(x_k) - f(x_0)| = 0 .$$

$(ii) \Rightarrow (i)$: (Beweis per Kontraposition) Sei f nicht stetig in $x_0 \in D$. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit

$$\forall \delta > 0 \, \exists x \in D, |x - x_0| < \delta \, : \, |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon . \tag{1}$$

Wähle $\delta = \frac{1}{n}$. Dann folgt aus (1) dass eine Folge $(x_k)_k$, $x_k \in D$, $x_k \to x_0$ existiert mit

$$|f(x_k) - f(x_0)| \geq \varepsilon .$$

Somit konvergiert $f(x_k)$ nicht gegen $f(x_0)$ für $k \to \infty$. Wir haben also aus $\neg(i)$ die Behauptung $\neg(ii)$ gefolgert. Das heißt es gilt: $(ii) \Rightarrow (i)$. □

Aufgabe 6:
Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, in denen die folgenden Funktionen differenzierbar sind und berechnen Sie dort deren Ableitung.

(i)
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \, : \, x \mapsto \begin{cases} e^{\cos x}, & x \in (-\infty, 0], \\ \frac{1}{x}, & x \in (0, \infty). \end{cases}$$

(ii)
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \, : \, x \mapsto \begin{cases} x\cos(\frac{1}{x}), & \text{für } x \neq 0 \\ 0, & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

Lösungsvorschlag:

(i) *Voraussetzung:* Seien $I := \mathbb{R}$ und $f : I \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) := \begin{cases} e^{\cos x}, & x \in (-\infty, 0], \\ \frac{1}{x}, & x \in (0, \infty), \end{cases}$$

gegeben.
Behauptung: f ist differenzierbar auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit

$$f'(x) := \begin{cases} -e^{\cos x} \sin x, & x \in (-\infty, 0), \\ -\frac{1}{x^2}, & x \in (0, \infty). \end{cases}$$

In $x = 0$ ist f nicht differenzierbar.

Beweis. Auf der offenen Menge $(-\infty, 0)$ ist f differenzierbar. Mit der Ketteneregel erhält man

$$f'(x) = e^{\cos x} \cdot (-\sin x) = -e^{\cos x} \sin x$$

für alle $x \in (-\infty, 0)$.
Auf der offenen Menge $(0, \infty)$ ist f differenzierbar mit $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$.
Für $x > 0$ gilt

$$f(x) = \frac{1}{x} \to \infty$$

für $x \to 0+$. Somit ist f in $x = 0$ nicht stetig und daher in $x = 0$ auch nicht differenzierbar. □

(ii) *Voraussetzung:* Sei $I := \mathbb{R}$ und $f : I \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) := \begin{cases} x\cos(\frac{1}{x}), & \text{für } x \neq 0 \\ 0, & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

gegeben.
Behauptung: f ist differenzierbar auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit

$$f'(x) := \cos(\frac{1}{x}) + \frac{1}{x}\sin(\frac{1}{x}) \quad \forall x \neq 0 .$$

In $x = 0$ ist f nicht differenzierbar.

Beweis. Nach den Rechenregel für differenzierbare Funktionen, insbesondere die Produkt- und Kettenregel ist die gegebene Funktion in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ differenzierbar und hat dort die Ableitung

$$f'(x) = \cos(\frac{1}{x}) + \frac{1}{x}\sin(\frac{1}{x}).$$

Wir müssen also nur noch das Verhalten in $x_0 = 0$ untersuchen. Der Differenzenquotient ergibt für $x_0 = 0$:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x\cos(\frac{1}{x}) - 0}{x - 0} = \cos(\frac{1}{x}),$$

und $\cos(\frac{1}{x})$ besitzt keinen Grenzwert für $x \to 0$, denn

$$\lim_{x\to 0} \cos(\frac{1}{x}) = \lim_{h\to\infty} \cos(h)$$

und $\cos(h)$ hat keinen Grenzwert für $h \to \infty$. □

Aufgabe 7:

(i) Sei $I \subset \mathbb{R}$. Wann heißt eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar und wie ist ihre Ableitungsfunktion definiert?

(ii) Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Funktionen. Die Funktion f sei stetig in 0 und g sei differenzierbar in 0 mit $g(0) = 0$. Zeigen Sie, dass $g \cdot f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto g(x)f(x)$ in 0 differenzierbar ist, und berechnen Sie die Ableitung.

Lösungsvorschlag:

(i) Die Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt differenzierbar (diffbar) auf I oder einfach differenzierbar falls f in jedem Punkt $x_0 \in I$ diffbar ist. Die hierdurch gegebene Funktion

$$f' : I \to \mathbb{R};\, x_0 \mapsto f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

heißt Ableitungsfunktion oder kurz Ableitung von f.

(ii) *Voraussetzung*: Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Funktionen. Die Funktion f sei stetig in 0 und g sei differenzierbar in 0 mit $g(0) = 0$. *Behauptung*: Die Funktion $\varphi := g \cdot f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto g(x)f(x)$ ist in 0 differenzierbar mit $\varphi'(0) = f(0) \cdot g'(0)$.

Beweis. Für alle $h \neq 0$ gilt

$$\frac{\varphi(0+h) - \varphi(0)}{h} = \frac{g(h)f(h) - g(0)f(0)}{h} = \frac{g(h)f(h)}{h} = f(h) \cdot \frac{g(h)}{h} = f(h) \cdot \frac{g(h) - g(0)}{h}.$$

Da f stetig in 0 ist, gilt $f(h) \to f(0)$ für $h \to 0$, und da g differenzierbar in 0 ist, gilt $\frac{g(h)-g(0)}{h} \to g'(0)$ für $h \to 0$. Damit folgt

$$\frac{\varphi(0+h) - \varphi(0)}{h} = f(h) \cdot \frac{g(h) - g(0)}{h} \to f(0) \cdot g'(0)$$

für $h \to 0$, also ist φ nach Definition in 0 differenzierbar mit $\varphi'(0) = f(0) \cdot g'(0)$. □

Lösungsvorschlag zur Modulprüfung Analysis II

26.03.2019

Aufgabe 1:
Es seien $D := (-\pi,\pi)\times\mathbb{R}$ und $A := \{(x,y)\in D\colon x=0\}$, sowie $f\colon D\to\mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{2x^3y}{(x^2+y^2)\sin(x)}, & (x,y)\notin A,\\ 0, & (x,y)\in A.\end{cases}$$

Bestimmen Sie sämtliche $(x,y)\in D$ in denen f stetig ist.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1:
Behauptung: f ist auf D stetig.

Beweis: $D\setminus A$ ist offen und f auf $D\setminus A$ als Verkettung stetiger Funktionen stetig. Es bleibt die Stetigkeit in Punkten $(0,y)\in A$ zu prüfen. Sei dazu $(0,y)\in A$ und $(x_k,y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $D\setminus\{(0,y)\}$ mit $(x_k,y_k)\to(0,y)$ für $(k\to\infty)$. Nach den Regeln von de l'Hospital existiert $\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{|\sin(x)|}$, also ist $\frac{|x_k|}{|\sin(x_k)|}$ für $(x_k,y_k)\notin A$ beschränkt durch eine Konstante $C>0$. Für $(x_k,y_k)\notin A$ gilt somit

$$0\le |f(x_k,y_k)-f(0,y)| = \left|\frac{2x_k^3y_k}{(x_k^2+y_k^2)\sin(x_k)}\right| \le \underbrace{\frac{2\,|x_ky_k|}{x_k^2+y_k^2}}_{\le 1}\frac{x_k^2}{|\sin(x_k)|} \le \frac{x_k^2}{|\sin(x_k)|}\le C\,|x_k|$$

Somit gilt insgesamt für alle $k\in\mathbb{N}$ (Beachte: Ist $(x_k,y_k)\in A$, so gilt $f(x_k,y_k)=0$):

$$0\le |f(x_k,y_k)-f(0,y)|\le C|x_k|\to 0\quad (k\to\infty),$$

d.h. f ist stetig in $(0,y)$. □

Aufgabe 2:
Die Funktion $f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x,y) := (x^2-y^2)\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\quad \text{für alle } (x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

Bestimmen Sie alle lokalen Extrema von f und entscheiden Sie, ob es sich jeweils um ein lokales Minimum oder ein lokales Maximum handelt.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 2:
Behauptung: f hat in $(0,1)$ und $(0,-1)$ lokale Minima, sowie in $(1,0)$ und $(-1,0)$ lokale Maxima.

Beweis: f ist zweimal stetig partiell differenzierbar, also gilt $f\in\mathrm{C}^2(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$. Die notwendige Bedingung für lokale Extrema in $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ lautet

$$0\overset{!}{=} f'(x,y) = (2x(1-x^2+y^2),\,-2y(1+x^2-y^2))\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} x(1-x^2+y^2)=0,\\ y(1+x^2-y^2)=0.\end{cases}$$

Dies liefert die stationären Punkte $(0,0)$, $(0,1)$, $(0,-1)$, $(1,0)$ und $(-1,0)$.

Für $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ gilt

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2(1-5x^2+y^2+2x^4-2x^2y^2) & 4xy(x^2-y^2)\\ 4xy(x^2-y^2) & -2(1-5y^2+x^2+2y^4-2x^2y^2)\end{pmatrix}\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}.$$

- $\underline{(0,0)}$: Hier gilt $H_f(0,0)=\begin{pmatrix}2&0\\0&-2\end{pmatrix}$ und somit $\det(H_f(0,0))=-4<0$, d.h. $H_f(0,0)$ ist indefinit. Nach Satz 8.2 hat f in $(0,0)$ also kein lokales Extremum.
- $\underline{(0,\pm1)}$: Hier gilt $H_f(0,1)=H_f(0,-1)=\begin{pmatrix}\frac{4}{\mathrm{e}}&0\\0&\frac{4}{\mathrm{e}}\end{pmatrix}$ und somit $\det(H_f(0,1))=\det(H_f(0,-1))=\frac{16}{\mathrm{e}^2}>0$ und $(H_f(0,1))_{11}=(H_f(0,-1))_{11}=\frac{4}{\mathrm{e}}$, d.h. $H_f(0,1)$ und $H_f(0,-1)$ sind positiv definit. Nach Satz 8.2 hat f in $(0,1)$ und $(0,-1)$ also ein lokales Minimum.
- $\underline{(\pm1,0)}$: Hier gilt $H_f(1,0)=H_f(-1,0)=\begin{pmatrix}-\frac{4}{\mathrm{e}}&0\\0&-\frac{4}{\mathrm{e}}\end{pmatrix}$ und somit $\det(H_f(1,0))=\det(H_f(-1,0))=\frac{16}{\mathrm{e}^2}>0$ und $(H_f(1,0))_{11}=(H_f(-1,0))_{11}=-\frac{4}{\mathrm{e}}$, d.h. $H_f(1,0)$ und $H_f(-1,0)$ sind negativ definit. Nach Satz 8.2 hat f in $(1,0)$ und $(-1,0)$ also ein lokales Maximum.

□

Aufgabe 3:
(i) Es seien $n\in\mathbb{N}$ und $D\subseteq\mathbb{R}^n$ offen, $D\neq\emptyset$. Formulieren Sie für $f\colon D\to\mathbb{R}$ den Satz von Taylor.

(ii) Es sei $f\colon(-1,\infty)\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y,z):=z\sin(y\sqrt{x+1})$. Berechnen Sie das Taylorpolynom 2. Ordnung im Nullpunkt.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 3:
(i) Der Satz von Taylor besagt:
Sei $k\in\mathbb{N}$, $f\in\mathrm{C}^{k+1}(D,\mathbb{R})$, $x_0\in D$, $h\in\mathbb{R}^n$ und $S[x_0,x_0+h]\subseteq D$. Dann existiert ein $\xi\in S[x_0,x_0+h]$ mit:

$$f(x_0+h)=\sum_{j=0}^{k}\frac{(h\cdot\nabla)^jf(x_0)}{j!}+\frac{(h\cdot\nabla)^{k+1}f(\xi)}{(k+1)!}.$$

(ii) *Behauptung:* Es gilt $T_2((x,y,z);(0,0,0))=yz$.

Beweis: Da alle Komponentenfunktionen von f mehrfach stetig partiell differenzierbar auf D sind gilt $f\in\mathrm{C}^2(D,\mathbb{R})$. Für $(x,y,z)\in D$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
f_x(x,y,z)&=\frac{yz\cos(y\sqrt{x+1})}{2\sqrt{x+1}},\\
f_y(x,y,z)&=z\sqrt{x+1}\cos(y\sqrt{x+1}),\\
f_z(x,y,z)&=\sin(y\sqrt{x+1}),\\
f_{xx}(x,y,z)&=-\frac{yz\cos(y\sqrt{x+1})}{4(x+1)^{\frac32}}-\frac{y^2z\sin(y\sqrt{x+1})}{4(x+1)},\\
f_{xy}(x,y,z)&=\frac{z\cos(y\sqrt{x+1})}{2\sqrt{x+1}}-\frac{yz\sin(y\sqrt{x+1})}{2}=f_{yx}(x,y,z),\\
f_{xz}(x,y,z)&=\frac{y\cos(y\sqrt{x+1})}{2\sqrt{x+1}}=f_{zx}(x,y,z),\\
f_{yy}(x,y,z)&=-z(x+1)\sin(y\sqrt{x+1}),\\
f_{yz}(x,y,z)&=\sqrt{x+1}\cos(y\sqrt{x+1})=f_{zy}(x,y,z),\\
f_{zz}(x,y,z)&=0.
\end{aligned}$$

Damit erhält man

$$\begin{aligned}
T_2((x,y,z);(0,0,0))&=f(0,0,0)+f'(0,0,0)\cdot(x,y,z)+\frac12(x,y,z)(H_f(0,0,0))(x,y,z)^T\\
&=0+(0,0,0)\cdot(x,y,z)+\frac12(x,y,z)\cdot\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=yz.
\end{aligned}$$

□

Aufgabe 4:
Es seien $D := \mathbb{R} \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ und $f : D \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$f(x, y) := (x\tan(y) + \sin(\pi x),\ xy^2 + \mathrm{e}^{xy}).$$

Zeigen Sie, dass es eine offene Umgebung von $(2, 0)$ gibt, die durch f bijektiv auf eine offene Umgebung von $(0, 1)$ abgebildet wird. Berechnen Sie außerdem die Ableitung der Umkehrfunktion von f im Punkt $(0, 1)$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 4:
Behauptung: Es gibt eine offene Umgebung von $(2, 0)$, die durch f bijektiv auf eine offene Umgebung von $(0, 1)$ abgebildet wird.

Beweis: Da alle Komponentenfunktionen von f stetig partiell differenzierbar sind, gilt $f \in C^1(D, \mathbb{R}^2)$ mit

$$f'(x, y) = \begin{pmatrix} \tan(y) + \pi\cos(\pi y) & x(1 + \tan^2(y)) \\ y^2 + y\mathrm{e}^{xy} & 2xy + x\mathrm{e}^{xy} \end{pmatrix}$$

für alle $(x, y) \in D$ und somit $f'(2, 0) = \begin{pmatrix} \pi & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, d.h. es gilt $\det f'(2, 0) = 2\pi \neq 0$. Nach dem Umkehrsatz 9.1 existieren offene Umgebungen U von $(2, 0)$, bzw. V von $(0, 1)$, sodass $f|_U$ bijektiv ist. □

Behauptung: Es gilt $(f|_U^{-1})'(0, 1) = \frac{1}{2\pi}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & \pi \end{pmatrix}$.

Beweis: Der Umkehrsatz liefert die Differenzierbarkeit der Umkehrfunktion und die Ableitung im Punkt $(0, 1)$ lautet

$$(f|_U^{-1})'(0, 1) = (f'(2, 0))^{-1} = \frac{1}{2\pi}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & \pi \end{pmatrix}.$$

□

Aufgabe 5:
Es seien $D := [-1, 1]^2$ und $f : D \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$f(x, y) := \frac{1}{3}\begin{pmatrix} \sin(x) + \cos^2(y) \\ \cos^2(x) + \sin(y) \end{pmatrix}.$$

(i) Zeigen Sie, dass f auf D eine Kontraktion bezüglich der euklidischen Norm ist.

(ii) Beweisen Sie, dass f genau einen Fixpunkt in D besitzt.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 5:
Behauptung: f ist eine Kontraktion bezüglich der euklidischen Norm.

Beweis: Nach dem eindimensionalen Mittelwertsatz erhalten wir für $z, \tilde{z} \in [-1, 1]$ die Abschätzungen

$$|\sin(z) - \sin(\tilde{z})| = |\cos(\xi_{z,\tilde{z}})||z - \tilde{z}| \leq |z - \tilde{z}|,$$
$$|\cos^2(z) - \cos^2(\tilde{z})| = |-2\sin(\xi_{z,\tilde{z}})\cos(\xi_{z,\tilde{z}})||z - \tilde{z}| = |-\sin(2\xi_{z,\tilde{z}})||z - \tilde{z}| \leq |z - \tilde{z}|.$$

Damit erhalten wir für $(x, y), (\tilde{x}, \tilde{y}) \in D$:

$$\begin{aligned}\|f(x, y) - f(\tilde{x}, \tilde{y})\|^2 &= \frac{1}{9}\left[(\sin(x) + \cos^2(y) - \sin(\tilde{x}) - \cos^2(\tilde{y}))^2 + (\cos^2(x) + \sin(y) - \cos^2(\tilde{x}) - \sin(\tilde{y}))^2\right] \\ &\leq \frac{1}{9}\left[(|x - \tilde{x}| + |y - \tilde{y}|)^2 + (|x - \tilde{x}| + |y - \tilde{y}|)^2\right] \\ &\leq \frac{2}{9}(\sqrt{2}\sqrt{|x - \tilde{x}|^2 + |y - \tilde{y}|^2})^2 \leq \frac{4}{9}\|(x, y) - (\tilde{x}, \tilde{y})\|^2,\end{aligned}$$

d.h. f ist Lipschitz-stetig mit Konstante $L := \frac{2}{3} < 1$ und daher eine Kontraktion. □

Behauptung: f besitzt genau einen Fixpunkt in D.

Beweis: D ist per Definition abgeschlossen. Außerdem gilt für $(x, y) \in D$:

$$f_1(x, y) = \frac{1}{3}(\sin(x) + \cos^2(y)) \in [-\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}] \subseteq [-1, 1],$$
$$f_2(x, y) = \frac{1}{3}(\cos^2(x) + \sin(y)) \in [-\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}] \subseteq [-1, 1],$$

d.h. es gilt $f(D) \subseteq D$. Außerdem ist f nach Teil (i) eine Kontraktion. Nach dem Banachschen Fixpunktsatz existiert somit ein eindeutiger Fixpunkt $(x^*, y^*) \in D$ mit $f(x^*, y^*) = (x^*, y^*)$. □

Aufgabe 6:
Es seien $n \in \mathbb{N}$ und $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbarer Weg mit $\gamma(0) = \gamma(1)$.

(i) Zeigen Sie, dass für jedes $v \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$\int_\gamma v \cdot dx = 0.$$

(ii) Weiter sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante $M \geq 0$. Beweisen Sie:

$$\left|\int_\gamma f(x) \cdot dx\right| \leq L(\gamma) M \sup\{\|\gamma(t)\| : t \in [0, 1]\}.$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 6:

(i) *Behauptung:* Für jedes $v \in \mathbb{R}^n$ gilt $\int_\gamma v \cdot dx = 0$.

Beweis: Nach Definition des Wegintegrals gilt

$$\int_\gamma v \cdot dx = \sum_{i=1}^n \int_\gamma v_i\, dx_i = \sum_{i=1}^n v_i \int_0^1 \gamma_i'(t)\, dt = \sum_{i=1}^n v_i(\gamma_i(1) - \gamma_i(0)) = 0.$$

□

(ii) *Behauptung:* Es gilt $\left|\int_\gamma f(x) \cdot dx\right| \leq L(\gamma) M \sup\{\|\gamma(t)\| : t \in [0, 1]\}$.

Beweis: Da $f(0) \in \mathbb{R}^n$ gilt $\int_\gamma f(0) \cdot dx = 0$ nach Teil (i). Damit erhält man

$$\begin{aligned}\left|\int_\gamma f(x) \cdot dx\right| &= \left|\int_\gamma (f(x) - f(0)) \cdot dx\right| \leq \int_0^1 |(f(\gamma(t)) - f(0)) \cdot \gamma'(t)|\, dt \\ &\leq \int_0^1 \underbrace{\|f(\gamma(t)) - f(0)\|}_{\leq M\|\gamma(t) - 0\|} \|\gamma'(t)\|\, dt \leq M \int_0^1 \|\gamma(t)\|\|\gamma'(t)\|\, dt \\ &\leq M \sup\{\|\gamma(t)\| : t \in [0, 1]\} \underbrace{\int_0^1 \|\gamma'(t)\|\, dt}_{= L(\gamma)}.\end{aligned}$$

□

Aufgabe 7:
Bestimmen Sie die Lösung des folgenden Anfangswertproblems

$$y'' - 3y' + 2y = 20\cos(2x), \quad y(0) = 2,\ y'(0) = -1.$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 7:
Behauptung: Die Lösung des Anfangswertproblems ist gegeben durch

$$y(x) = \mathrm{e}^x + 2\mathrm{e}^{2x} - \cos(2x) - 3\sin(2x) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Beweis: Das charakteristische Polynom der zugehörigen homogenen Differentialgleichung lautet $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda - 2)$. Damit ist

$$y_h(x) = A\mathrm{e}^x + B\mathrm{e}^{2x} \quad (A, B \in \mathbb{R})$$

die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung. Um nun eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung zu finden, verwendet man den Ansatz $y_p(x) = a\cos(2x) + b\sin(2x)$ mit $a, b \in \mathbb{R}$. Einsetzen in die Differentialgleichung liefert

$$(6a - 2b)\sin(2x) - (2a + 6b)\cos(2x) \stackrel{!}{=} 20\cos(2x).$$

Durch Koeffizientenvergleich erhält man schließlich die gesuchten Konstanten $a = -1$ und $b = -3$. Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung lautet schließlich

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = A\mathrm{e}^x + B\mathrm{e}^{2x} - \cos(2x) - 3\sin(2x) \quad (x \in \mathbb{R},\ A, B \in \mathbb{R}).$$

Einsetzen der Anfangswerte ergibt $A = 1$ und $B = 2$ und somit

$$y(x) = \mathrm{e}^x + 2\mathrm{e}^{2x} - \cos(2x) - 3\sin(2x) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

□

Lösungsvorschlag zur Modulprüfung Analysis III

27.03.2019

Aufgabe 1:
Es seien $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{A}$. Zeigen Sie, dass für $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} \mu(A_k) \leq \mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) + \sum_{1\leq k<i\leq n} \mu(A_k \cap A_i).$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1:
Behauptung: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\sum_{k=1}^{n} \mu(A_k) \leq \mu(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) + \sum_{1\leq k<i\leq n} \mu(A_k \cap A_i)$.

Beweis: Die Aussage kann mittels Vollständiger Induktion bewiesen werden.

IA: Für $n = 1$ gilt $\mu(A_1) = \mu(A_1)$ und für $n = 2$ ist aus der Vorlesung bekannt, dass

$$\mu(A_1 \cup A_2) + \mu(A_1 \cap A_2) = \mu(A_1) + \mu(A_2)$$

gilt.
IV: Für ein festes, aber beliebiges $n \in \mathbb{N}$ gelte bereits

$$\sum_{k=1}^{n} \mu(A_k) \leq \mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) + \sum_{1\leq k<i\leq n} \mu(A_k \cap A_i).$$

IS ($n \rightsquigarrow n+1$): Mit der σ-Subadditivität erhält man

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} \mu(A_k) &= \mu(A_{n+1}) + \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k) \underset{\mathrm{IV}}{\leq} \mu(A_{n+1}) + \mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) + \sum_{1\leq k<i\leq n} \mu(A_k \cap A_i)\\
&= \mu\left(A_{n+1} \cup \bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) + \mu\left(A_{n+1} \cap \bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) + \sum_{1\leq k<i\leq n} \mu(A_k \cap A_i)\\
&= \mu\left(A_{n+1} \cup \bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) + \mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} (A_k \cap A_{n+1})\right) + \sum_{1\leq k<i\leq n} \mu(A_k \cap A_i)\\
&\leq \mu\left(\bigcup_{k=1}^{n+1} A_k\right) + \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k \cap A_{n+1}) + \sum_{1\leq k<i\leq n} \mu(A_k \cap A_i)\\
&= \mu\left(\bigcup_{k=1}^{n+1} A_k\right) + \sum_{1\leq k<i\leq n+1} \mu(A_k \cap A_i).
\end{aligned}$$

$\square$

Aufgabe 2:
(i) Berechnen Sie

$$\lim_{n\to\infty} \int_{1+\frac{1}{n}}^{1+n} \frac{n^3}{1+(nx)^3}\, dx.$$

(ii) Es seien $d \in \mathbb{N}$, $X \in \mathfrak{B}_d$, $X \neq \emptyset$ und $f \in \mathcal{L}^1(X)$. Zeigen Sie:

$$\lim_{n\to\infty} \int_X \frac{\sin(f(x))f(x)}{1+e^{nf(x)}}\, dx = \int_X \sin(f_-(x))f_-(x)\, dx.$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 2:
(i) *Behauptung:* Es gilt $\lim_{n\to\infty} \int_{1+\frac{1}{n}}^{1+n} \frac{n^3}{1+(nx)^3}\, dx = 1$.

Beweis: Zu $n \in \mathbb{N}$ definiert man $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) := \frac{1}{x^3+\frac{1}{n^3}} \mathbb{1}_{[1+\frac{1}{n}, 1+n]}$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$f_n(x) = \frac{1}{x^3+\frac{1}{n^3}} \mathbb{1}_{[1+\frac{1}{n},1+n]} \leq \frac{1}{x^3+\frac{1}{(n+1)^3}} \mathbb{1}_{[1+\frac{1}{n+1},1+(n+1)]} = f_{n+1}(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$, sowie

$$f_n(x) = \frac{1}{x^3+\frac{1}{n^3}} \mathbb{1}_{[1+\frac{1}{n},1+n]} \to \frac{1}{x^3} \mathbb{1}_{(1,\infty)} \qquad (n\to\infty).$$

Mit dem Satz von Beppo-Levi folgt

$$\lim_{n\to\infty} \int_{1+\frac{1}{n}}^{1+n} \frac{n^3}{1+(nx)^3}\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty} f_n(x)\, dx = \int_1^\infty \frac{1}{x^3}\, dx = \frac{1}{2}.$$

$\square$

(ii) *Behauptung:* Es gilt $\lim_{n\to\infty} \int_X \frac{\sin(f)f}{1+e^{nf}}\, dx = \int_X \sin(f_-)f_-\, dx$.

Beweis: Zu $n \in \mathbb{N}$ definiert man $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) := \frac{\sin(f(x))f(x)}{1+e^{nf(x)}}$. Dann gilt

$$|f_n| = \frac{|\sin(f)f|}{|1+e^{nf}|} \leq |\sin(f)f| =: g.$$

g ist wegen $|g| \leq |f|$ eine integrierbare Majorante. Weiter gilt

- $f(x) > 0$: $f_n(x) = \frac{\sin(f(x))f}{1+e^{nf(x)}} \to 0$ $(n\to\infty)$.
- $f(x) = 0$: $f_n(x) = 0$.
- $f(x) < 0$: $f_n(x) = \frac{\sin(f(x))f}{1+e^{nf(x)}} \to \sin(f(x))f(x)$ $(n\to\infty)$.

Insgesamt ergibt sich somit $f_n \to \sin(f_-)f_-$ für $n \to \infty$. Nach dem Satz von Lebesgue erhält man somit

$$\lim_{n\to\infty} \int_X \frac{\sin(f)f}{1+e^{nf}}\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n(x)\, dx = \int_X \lim_{n\to\infty} f_n(x)\, dx = \int_X \sin(f_-(x))f_-(x)\, dx.$$

$\square$

Aufgabe 3:
Zeigen Sie, dass $K := \{x \in \mathbb{R}^5 : |x| \leq 1\}$ messbar (d.h. $K \in \mathfrak{B}_5$) ist und berechnen Sie $\lambda_5(K)$. Dabei bezeichnet $|\cdot|$ die euklidische Norm.

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass $\lambda_4(\{x \in \mathbb{R}^4 : |x| \leq r\}) = \frac{1}{2}\pi^2 r^4$ gilt.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 3:
Behauptung: K ist messbar und es gilt $\lambda_5(K) = \frac{8}{15}\pi^2$.

Beweis: K ist als abgeschlossene Menge messbar. Weiter gilt für $x_5 \in \mathbb{R}$:

$$K_{x_5} = \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \le 1 - x_5^2\right\},$$

also ist $K_{x_5} = \emptyset$ für $|x_5| > 1$. Mit dem Hinweis folgt $\lambda_4(K_{x_5}) = \frac{1}{2}\pi^2(1-x_5^2)^2$ für $|x_5| \le 1$ und $\lambda_4(K_{x_5}) = 0$ für $|x_5| > 1$. Mit dem Prinzip von Cavalieri erhält man

$$\lambda_5(K) = \int_{\mathbb{R}} \lambda_4(K_{x_5})\, dx_5 = \frac{1}{2}\pi^2 \int_{-1}^{1} (1 - x_5^2)^2\, dx_5 = \pi^2 \left[x_5 - \frac{2}{3}x_5^3 + \frac{1}{5}x_5^5\right]_0^1 = \frac{8}{15}\pi^2.$$

□

Aufgabe 4:

(i) Es sei A das Dreieck mit den Eckpunkten $(1,0)$, $(1,1)$, $(0,1)$. Berechnen Sie das Integral

$$\int_A \cos(x^4)(1-y)^2\, d(x,y).$$

(ii) Es seien $B := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le z \le \sqrt[4]{x^2+y^2}\}$ und

$$f : B \to \mathbb{R},\ f(x,y,z) := \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}z.$$

Ist f auf B integrierbar? Begründen Sie Ihre Antwort und bestimmen Sie gegebenenfalls $\int_B f(x,y,z)\, d(x,y,z)$.

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-r^2}\, dr = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ gilt.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 4:

(i) *Behauptung:* Es gilt $\int_A \cos(x^4)(1-y)^2\, d(x,y) = \frac{\sin(1)}{12}$.

Beweis: Es gilt $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1,\ 1 - x \le y \le 1\}$. Da A kompakt ist und $f : A \to \mathbb{R}$, $f(x,y) := \cos(x^4)(1-y)^2$ stetig ist, ist f integrierbar. Nach dem Satz von Fubini gilt somit

$$\begin{aligned}\int_A \cos(x^4)(1-y)^2\, d(x,y) &= \int_0^1 \int_{1-x}^1 \cos(x^4)(1-y)^2\, dy\, dx = -\frac{1}{3}\int_0^1 \cos(x^4)\Big[(1-y)^3\Big]_{1-x}^1\, dx \\ &= \frac{1}{3}\int_0^1 x^3\cos(x^4)\, dx = \frac{1}{12}\Big[\sin(x^4)\Big]_0^1 = \frac{\sin(1)}{12}.\end{aligned}$$

□

(ii) *Behauptung:* f ist auf B integrierbar mit $\int_B f(x,y,z)\, d(x,y,z) = \frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{4}$.

Beweis: Zunächst ist f nicht-negativ auf B und als stetige Funktion insbesondere messbar. Mittels der stetig differenzierbaren Transformation (Zylinderkoordinaten)

$$\phi : [0,\infty) \times [0, 2\pi] \times [0,\infty) \to,\ (r,\varphi,z) \mapsto (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi), z)$$

erhält man

$$B = \{(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi), z) : 0 \le r < \infty,\ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le z \le \sqrt{r}\}.$$

Definiert man $I := \{(r,\varphi,z) : 0 \le r < \infty,\ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le z \le \sqrt{r}\}$ (dann gilt $\phi(I) = B$) so liefert der Transformationssatz zusammen mit dem Satz von Fubini

$$\begin{aligned}\int_B f(x,y,z)\, d(x,y,z) &= \int_I f(\phi(r,\varphi,z))|\det\phi'(r,\varphi,z)|\, d(r,\varphi,z) \\ &= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{r}} r\mathrm{e}^{-r^2} z\, dz\, d\varphi\, dr = 2\pi \int_0^\infty r\mathrm{e}^{-r^2}\left[\frac{1}{2}z^2\right]_0^{\sqrt{r}} dr \\ &= \pi \int_0^\infty r^2\mathrm{e}^{-r^2}\, dr = \pi\left(\lim_{R\to\infty}\left[-\frac{1}{2}r\mathrm{e}^{-r^2}\right]_0^R + \frac{1}{2}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-r^2}\, dr\right) \\ &= \frac{\pi}{2}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-r^2}\, dr = \frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{4},\end{aligned}$$

wobei aus der Vorlesung bekannt ist, dass $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-r^2}\, dr = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ gilt. Damit ist f auf B insbesondere integrierbar. □

Aufgabe 5:

Es seien $B := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 1\}$ und $H := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Ferner umlaufe der Weg γ den Rand der Menge B einmal in positiver Richtung.

Zeigen Sie, dass für $u \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ und $v \in \mathrm{C}^2(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ gilt:

$$\int_B u\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) d(x,y) + \int_B (\nabla u)\cdot(\nabla v)\, d(x,y) = \int_\gamma (H(u\nabla v))\cdot d(x,y).$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 5:

Behauptung: Für $u \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ und $v \in \mathrm{C}^2(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ gilt:

$$-\int_B u\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) d(x,y) = \int_B (\nabla u)\cdot(\nabla v)\, d(x,y) - \int_\gamma (H(u\nabla v))\cdot d(x,y).$$

Beweis: Definiert man $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ durch $f(x,y) := u\nabla v = (u\frac{\partial v}{\partial x}, u\frac{\partial v}{\partial y})$, so gilt $f \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^2)$. Mit dem Satz von Gauß erhält man somit

$$\begin{aligned}\int_B \left((\nabla u)\cdot(\nabla v) + u\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)\right) d(x,y) &= \int_B \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + u\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + u\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) d(x,y) \\ &= \int_B \operatorname{div}(u\nabla v)\, d(x,y) = \int_B \operatorname{div} f\, d(x,y) = \int_\gamma (f_1\, dy - f_2\, dx) = \int_\gamma \left(u\frac{\partial v}{\partial x}\, dy - u\frac{\partial v}{\partial y}\, dx\right) \\ &= \int_\gamma \begin{pmatrix} -u\frac{\partial v}{\partial y} \\ u\frac{\partial v}{\partial x} \end{pmatrix}\cdot d(x,y) = \int_\gamma (H(u\nabla v))\cdot d(x,y).\end{aligned}$$

□

Aufgabe 6:

Es seien $d \in \mathbb{N}$, $X \in \mathfrak{B}_d$, $X \ne \emptyset$, $1 < p < q < \infty$ und $f \in \mathcal{L}^p(X) \cap \mathcal{L}^q(X)$. Zeigen Sie: Ist $\theta \in (0,1)$ und $r := \theta p + (1-\theta)q$, so gilt: $f \in \mathcal{L}^r(X)$ und

$$\int_X |f(x)|^r\, dx \le \left(\int_X |f(x)|^p\, dx\right)^\theta \left(\int_X |f(x)|^q\, dx\right)^{1-\theta}.$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 6:

Behauptung: Für alle $\theta \in (0,1)$ gilt

$$\int_X |f(x)|^{\theta p + (1-\theta)q}\, dx \le \left(\int_X |f(x)|^p\, dx\right)^\theta \left(\int_X |f(x)|^q\, dx\right)^{1-\theta}.$$

Beweis: Für $\lambda = \frac{1}{\theta}$ und $\lambda' = \frac{1}{1-\theta}$ gilt $\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda'} = \theta + (1-\theta) = 1$. Die Hölderungleichung liefert somit

$$\begin{aligned}\int_X |f(x)|^r\, dx = \int_X |f(x)|^{\theta p}|f(x)|^{(1-\theta)q}\, dx &\le \left(\int_X |f(x)|^{\theta p\lambda}\, dx\right)^{\frac{1}{\lambda}} \left(\int_X |f(x)|^{(1-\theta)q\lambda'}\, dx\right)^{\frac{1}{\lambda'}} \\ &= \left(\int_X |f(x)|^p\, dx\right)^\theta \left(\int_X |f(x)|^q\, dx\right)^{1-\theta}.\end{aligned}$$

Damit erhalten wir insbesondere $f \in \mathcal{L}^r(X)$. □

Aufgabe 7:
Es seien $p \in [1, \infty]$, $\alpha \in \mathbb{R}$ und

$$f_\alpha : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \; f_\alpha(x,y) := \arctan(|(x,y)|^\alpha).$$

Bestimmen Sie sämtliche $\alpha \in \mathbb{R}$ für die $f_\alpha \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ gilt. Dabei bezeichnet $|\cdot|$ die euklidische Norm.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 7:
Behauptung: Es gilt $f_\alpha \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$. Für $\alpha \geq 0$ ist f_α in keinem $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ enthalten und für $\alpha < 0$ gilt

$$f_\alpha \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \;\Leftrightarrow\; p > -\frac{2}{\alpha}.$$

Beweis:

- Im Fall $p = \infty$ gilt für alle $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\|f_\alpha\|_\infty = \sup\{|f_\alpha(x,y)| : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}\} \leq \frac{\pi}{2} < \infty,$$

d.h. es gilt $f_\alpha \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$.

- Sei nun $1 \leq p < \infty$. f_α ist nicht-negativ und als stetige Funktion messbar. Mittels Polarkoordinaten erhält man unter Verwendung des Transformationssatzes und des Satzes von Tonelli:

$$\int_{\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}} |f_\alpha(x,y)|^p \, d(x,y) = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} r \arctan(r^\alpha)^p \, d\varphi \, dr = 2\pi \int_0^\infty r \arctan(r^\alpha)^p \, dr.$$

Weiter gilt

$$\int_0^1 r \arctan(r^\alpha)^p \, dr \leq \left(\frac{\pi}{2}\right)^p \int_0^1 r \, dr = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^p < \infty.$$

Sei nun zunächst $\alpha \geq 0$. Dann gilt $r^\alpha \geq 1$ für alle $r \geq 1$ und somit

$$\int_1^\infty r \arctan(r^\alpha)^p \, dr \geq \left(\frac{\pi}{4}\right)^p \int_1^\infty r \, dr = \infty,$$

d.h. f_α liegt in keinem $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ falls $\alpha \geq 0$.

Sei nun $\alpha < 0$. Dann gilt $r^\alpha \to 0$ für $r \to \infty$. Nach den Regeln von de l'Hospital gilt außerdem $\lim_{x \to 0} \frac{\arctan(x)}{x} = 1$. Daher existiert ein $h > 0$ mit

$$\frac{1}{2} \leq \frac{\arctan(x)}{x} \leq \frac{3}{2} \quad \text{für alle } 0 < x \leq h$$

und somit gilt $\frac{1}{2}x \leq \arctan(x) \leq \frac{3}{2}x$ für alle $0 \leq x \leq h$. Damit gilt

$$\int_1^\infty r \arctan(r^\alpha)^p \, dr < \infty \;\Leftrightarrow\; \int_1^\infty r^{\alpha p + 1} \, dr < \infty \;\Leftrightarrow\; \alpha p + 1 < -1 \;\Leftrightarrow\; p > -\frac{2}{\alpha},$$

d.h. $f_\alpha \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ genau dann, wenn $p > -\frac{2}{\alpha}$ (und $\alpha < 0$) gilt.

$\square$