

Lösungsvorschlag zur Modulprüfung Analysis I

27.09.2018

Aufgabe 1:

Die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sei rekursiv definiert durch

$$a_1 := -1, \quad a_{n+1} := \frac{9 + a_n^2}{6} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

- Zeigen Sie, dass $a_n \in [\frac{5}{3}, 3]$ für alle $n \geq 2$ gilt.
- Zeigen Sie, dass $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert und bestimmen Sie den Grenzwert.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1:

(i) Behauptung: Für alle $n \geq 2$ gilt $a_n \in [\frac{5}{3}, 3]$.

Beweis: Die Behauptung kann mittels vollständiger Induktion bewiesen werden.

IA: Es gilt $a_2 = \frac{9+a_1^2}{6} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3} \in [\frac{5}{3}, 3]$.

IV: Die Aussage gelte bereits für ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$, d.h. für eine $n \geq 2$ gelte bereits $a_n \in [\frac{5}{3}, 3]$.
IS ($n \rightsquigarrow n+1$): Nach Induktionsvoraussetzung gilt $1 \leq \frac{5}{3} \leq a_n \leq 3$. Damit erhält man

$$a_{n+1} = \frac{9 + a_n^2}{6} \geq \frac{9 + 1^2}{6} = \frac{5}{6} \quad \text{und} \quad a_{n+1} = \frac{9 + a_n^2}{6} \leq \frac{9 + 3^2}{6} = \frac{18}{6} = 3,$$

d.h. es gilt $a_{n+1} \in [\frac{5}{3}, 3]$. □

(ii) Behauptung: $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen 3.

Beweis: Zunächst gilt wegen Teil (i) $a_n \leq 3$ für alle $n \in \mathbb{N}$, denn auch $a_1 = -1 \leq 3$. Weiter gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{9 + a_n^2}{6} - a_n = \frac{9 + a_n^2 - 6a_n}{6} = \frac{(a_n - 3)^2}{6} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad a_n \leq a_{n+1}.$$

Somit ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton wachsend und nach oben beschränkt und somit konvergent. Sei $a := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$. Dann muss a die folgende Gleichung erfüllen

$$a = \frac{9 + a^2}{6} \quad \Leftrightarrow \quad (a - 3)^2 = 9 + a^2 - 6a = 0,$$

also gilt $a = 3$. □

Aufgabe 2:

- Untersuchen Sie die folgende Reihe auf Konvergenz und absolute Konvergenz.

$$\sum_{n=1}^{\infty} n! \left(\frac{2}{n} \right)^n.$$

- Bestimmen Sie sämtliche $x \in \mathbb{R}$, für die die folgende Potenzreihe konvergiert.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{8^n(n^2+1)}(x-1)^{3n}.$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 2:

- Behauptung: $\sum_{n=1}^{\infty} n! \left(\frac{2}{n} \right)^n$ konvergiert absolut.

Beweis: Es sei $a_n := n! \left(\frac{2}{n} \right)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Damit erhält man

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{(n+1)!2^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{n!2^n} = 2 \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \frac{2}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \rightarrow \frac{2}{e} < 1 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Somit konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} n! \left(\frac{2}{n} \right)^n$ absolut nach dem Quotientenkriterium. □

- Behauptung: Die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{8^n(n^2+1)}(x-1)^{3n}$ konvergiert für alle $x \in [-1, 3]$ und divergiert für $x \in \mathbb{R} \setminus [-1, 3]$.

Beweis: Für $k \in \mathbb{N}$ sei

$$a_k := \begin{cases} \frac{2n}{8^n(n^2+1)}, & k = 3n, \quad n \in \mathbb{N} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann gilt $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{8^n(n^2+1)}(x-1)^{3n} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(x-1)^k$. Für $k = 3n$ erhält man

$$\sqrt[k]{|a_k|} = \sqrt[3n]{\frac{2n}{8^n(n^2+1)}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt[3]{2n}}{\sqrt[3]{n^2+1}} \right)^{\frac{1}{3}} \rightarrow \frac{1}{2} \quad (n \rightarrow \infty).$$

Damit erhält man den Konvergenzradius

$$r = \left(\limsup_{k \rightarrow \infty} |a_k| \right)^{-1} = 2,$$

d.h. die Potenzreihe konvergiert absolut für $|x-1| < 2$ und divergiert für $|x-1| > 2$.

Für $x = -1$ erhält man die folgende Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n}{n^2+1}$. Es gilt $\frac{2n}{n^2+1} = \frac{2}{1+\frac{1}{n}} \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$ und

$$\begin{aligned} \frac{2n}{n^2+1} - \frac{2(n+1)}{(n+1)^2+1} &= \frac{2n(n^2+2n+2) - 2(n+1)(n^2+1)}{(n^2+1)(n^2+2n+2)} = \frac{2n^2+2n-2}{(n^2+1)(n^2+2n+2)} \\ &\geq \frac{2n^2+2n-2n}{(n^2+1)(n^2+2n+2)} = \frac{2n^2}{(n^2+1)(n^2+2n+2)} \geq 0, \end{aligned}$$

d.h. $\left(\frac{2n}{n^2+1} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine monoton fallende Nullfolge und somit konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n}{n^2+1}$ nach dem Leibnizkriterium.

Für $x = 3$ erhält man die folgende Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n^2+1}$. Es gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n^2+1} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n^2+n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Da die harmonische Reihe divergiert, divergiert auch $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n^2+1}$ nach dem Minorantenkriterium. □

Aufgabe 3:

Es sei $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, sowie $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Funktionenfolge definiert durch

$$f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_n(x) := \arctan(n g(x)).$$

- Sei zunächst $g(x) := |x|$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dann punktweise auf $\mathbb{R}$ konvergiert und geben Sie die Grenzfunktion an. Konvergiert $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auch gleichmäßig?
- Nun sei g gegeben durch

$$g(x) := \begin{cases} \frac{x}{|x|}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dann punktweise auf $\mathbb{R}$ konvergiert und geben Sie die Grenzfunktion an. Konvergiert $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auch gleichmäßig?

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 3:

- Behauptung: $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert punktweise, aber nicht gleichmäßig gegen

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Beweis: Für $n \in \mathbb{N}$ ist $f_n = \arctan(n|x|)$, d.h. für $x = 0$ gilt $f_n(x) = \arctan(0) = 0 \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$). Für $x \neq 0$ gilt $f_n(x) = \arctan(n|x|) \rightarrow \frac{\pi}{2}$ ($n \rightarrow \infty$). Also konvergiert $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ punktweise gegen

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Da f_n stetig ist für alle $n \in \mathbb{N}$, sowie die punktweise Grenzfunktion f unstetig ist, konvergiert $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nicht gleichmäßig. $\square$

- Behauptung: $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig gegen

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} -\frac{\pi}{2}, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ \frac{\pi}{2}, & x > 0. \end{cases}$$

Beweis: Für $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$f_n(x) = \begin{cases} \arctan(n \frac{x}{|x|}), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

d.h. $x = 0$ gilt $f_n(x) = 0 \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$). Für $x > 0$ gilt $\frac{x}{|x|} = 1$ und somit $f_n(x) = \arctan(n) \rightarrow \frac{\pi}{2}$ ($n \rightarrow \infty$). Für $x < 0$ gilt $\frac{x}{|x|} = -1$ und somit $f_n(x) = \arctan(-n) \rightarrow -\frac{\pi}{2}$ ($n \rightarrow \infty$). Also konvergiert $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ punktweise gegen

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} -\frac{\pi}{2}, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ \frac{\pi}{2}, & x > 0. \end{cases}$$

Um die gleichmäßige Konvergenz zu zeigen, sei nun $\varepsilon > 0$. Dann existieren zunächst $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ mit

$$\left| \arctan(n) - \frac{\pi}{2} \right| \leq \varepsilon \quad \forall n \geq n_1 \quad \text{und} \quad \left| \arctan(-n) + \frac{\pi}{2} \right| \leq \varepsilon \quad \forall n \geq n_2.$$

Setzte $n_0 := \max\{n_1, n_2\}$. Für $x = 0$ gilt dann $|f_n(x) - f(x)| = 0 \leq \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$. Weiter gilt für $x > 0$

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \arctan(n) - \frac{\pi}{2} \right| \leq \varepsilon \quad \forall n \geq n_0,$$

und für $x < 0$

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \arctan(-n) + \frac{\pi}{2} \right| \leq \varepsilon \quad \forall n \geq n_0.$$

Insgesamt erhält man also

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall n \geq n_0: |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon,$$

d.h. $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig gegen f . $\square$

Aufgabe 4:

Zeigen Sie, dass die Ungleichung

$$\cos^3(x) \geq -1 + \frac{3}{2}(x - \pi)^2 - \frac{7}{2}\pi^3$$

für alle $0 \leq x \leq \pi$ gilt.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 4:

Behauptung: Für alle $x \in [0, \pi]$ gilt $\cos^3(x) \geq -1 + \frac{3}{2}(x - \pi)^2 - \frac{7}{2}\pi^3$.

Beweis: Definiere $f: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ durch $f(x) := \cos^3(x)$ für alle $x \in [0, \pi]$. Dann gilt $f \in C^\infty([0, \pi])$ nach der Kettenregel und für $x \in [0, \pi]$ gilt

$$f'(x) = -3\cos^2(x)\sin(x), \quad f''(x) = 6\cos(x)\sin^2(x) - 3\cos^3(x) \quad \text{und} \quad f'''(x) = 21\sin(x)\cos^2(x) - 6\sin^3(x).$$

Damit erhält man

$$T_2(x; \pi) = \sum_{k=0}^2 \frac{f^{(k)}(\pi)}{k!} (x - \pi)^k = -1 + \frac{3}{2}(x - \pi)^2.$$

Nach dem Satz von Taylor existiert für alle $x \in [0, \pi]$ ein $\xi \in (x, \pi)$ mit

$$\cos^3(x) = f(x) = T_2(x; \pi) + \frac{f'''(\xi)}{3!} (x - \pi)^3 = T_2(x; \pi) + \frac{1}{6} (21\sin(\xi)\cos^2(\xi) - 6\sin^3(\xi))(x - \pi)^3.$$

Wegen $(x - \pi)^3 \leq 0$ für $x \in [0, \pi]$ und $\sin(\xi)\cos^2(\xi) \leq 1$, bzw. $0 \leq \sin^3(\xi)$ erhält man

$$\begin{aligned} \cos^3(x) &= -1 + \frac{3}{2}(x - \pi)^2 + \underbrace{\frac{1}{6}(21\sin(\xi)\cos^2(\xi) - 6\sin^3(\xi))}_{\leq 1} \underbrace{(x - \pi)^3}_{\geq 0} \\ &\geq -1 + \frac{3}{2}(x - \pi)^2 + \underbrace{\frac{21}{6}(x - \pi)^3}_{\geq -\pi^3} = -1 + \frac{3}{2}(x - \pi)^2 - \frac{7}{2}\pi^3. \end{aligned}$$

$\square$

Aufgabe 5:

Für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sei die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} \sin(x), & x \in (-\infty, 0], \\ x + \alpha, & x \in (0, 1), \\ e^{1+\beta x}, & x \in [1, \infty). \end{cases}$$

- Bestimmen Sie sämtliche $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ so, dass f stetig auf ganz $\mathbb{R}$ ist.
- Bestimmen Sie für die Werte α, β aus (i) alle $x \in \mathbb{R}$ in denen f differenzierbar ist. Geben Sie gegebenenfalls die Ableitung an.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 5:

- Behauptung: f ist stetig auf $\mathbb{R}$ genau dann, wenn $\alpha = 0$ und $\beta = -1$.

Beweis: Da 0 und 1 Häufungspunkte von $\mathbb{R}$ sind, ist f stetig auf ganz $\mathbb{R}$ genau dann, wenn gilt

$$\begin{aligned} 0 = \sin(0) &= \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) \stackrel{!}{=} \lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \alpha, \\ 1 + \alpha &= \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) \stackrel{!}{=} \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = e^{1+\beta}, \end{aligned}$$

also genau dann, wenn gilt

$$\alpha = 0 \quad \text{und} \quad 1 = e^{1+\beta} \Leftrightarrow 0 = \log(1) = 1 + \beta \Leftrightarrow \beta = -1.$$

□

(ii) Behauptung: f ist differenzierbar auf $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Beweis: Auf den offenen Intervallen $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$ und $(1, \infty)$ ist f differenzierbar. Für $h > 0$ erhält man

$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{\sin(h) - \sin(0)}{h} \rightarrow (\sin(x))' \Big|_{x=0} = \cos(0) = 1 \quad (h \rightarrow 0)$$

und für $h < 0$ gilt

$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{h - \sin(0)}{h} = 1 \rightarrow 1 \quad (h \rightarrow 0),$$

also ist f differenzierbar in 0 mit Ableitung 1. Weiter gilt

$$\lim_{h \rightarrow 0-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{(1+h) - 1}{h} = 1$$

$$\neq -1 = -e^0 = (e^{-x})' \Big|_{x=0} = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{e^{-h} - e^0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h},$$

d.h. f ist in 1 nicht differenzierbar. Insgesamt gilt also f ist differenzierbar auf $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ mit Ableitung

$$f': \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f'(x) = \begin{cases} \cos(x), & (-\infty, 0], \\ 1, & x \in (0, 1), \\ -e^{1-x}, & x \in (1, \infty). \end{cases}$$

□

Aufgabe 6:

Es sei $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ existiere und sei endlich. Zeigen Sie, dass f gleichmäßig stetig auf $[0, \infty)$ ist.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 6:

Behauptung: f ist gleichmäßig stetig auf $[0, \infty)$.

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$. Nach Voraussetzung existiert $c := \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) < \infty$, d.h. es existiert ein $x_0 = x_0(\varepsilon) \in [0, \infty)$ mit

$$|f(x) - c| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall x \geq x_0. \quad (1)$$

Da f stetig, sowie $[0, x_0]$ beschränkt und abgeschlossen ist, ist f auf $[0, x_0]$ insbesondere gleichmäßig stetig (siehe Vorlesung), d.h. es existiert $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, sodass $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$ gilt für alle $x, y \in [0, x_0]$ mit $|x - y| \leq \delta$. Außerdem gilt nach (1) für alle $x, y \in [x_0, \infty)$ (unabhängig von δ):

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - c| + |f(y) - c| \leq \varepsilon.$$

Insgesamt gilt also für alle $x, y \in [0, \infty)$:

$$|x - y| \leq \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon,$$

d.h. f ist gleichmäßig stetig auf $[0, \infty)$.

□

Aufgabe 7:

Berechnen Sie die folgenden Integrale.

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(x) dx, \quad \text{(ii)} \quad \int_0^{\pi} \sin(x) e^{|\cos(x)|} dx, \quad \text{(iii)} \quad \int_0^1 \frac{1}{1 + \sqrt{x}} dx. \end{aligned}$$

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass die Funktion

$$F: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto x(\log(x) - 1)$$

eine Stammfunktion von $\log$ ist.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 7:

(i) Behauptung: Es gilt $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(x) dx = \frac{\log(2)}{2}$.

Beweis: Für $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$ gilt $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$. Damit erhält man

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(x) dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(x)}{\cos(x)} dx = - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{-\sin(x)}{\cos(x)} dx \\ &= - [\log(|\cos(x)|)]_0^{\frac{\pi}{4}} = \log(|\cos(0)|) - \log(|\cos(\frac{\pi}{4})|) \\ &= -\log(\frac{\sqrt{2}}{2}) = -\frac{\log(\frac{1}{2})}{2} = \frac{\log(2)}{2}. \end{aligned}$$

□

(ii) Behauptung: Es gilt $\int_0^{\pi} \sin(x) e^{|\cos(x)|} dx = 2(e - 1)$.

Beweis: Für $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ gilt $\cos(x) \geq 0$, also $|\cos(x)| = \cos(x)$. Für $x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ gilt $\cos(x) \leq 0$, also $|\cos(x)| = -\cos(x)$. Damit erhält man

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \sin(x) e^{|\cos(x)|} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) e^{\cos(x)} dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin(x) e^{-\cos(x)} dx \\ &= - \left[e^{\cos(x)} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[e^{-\cos(x)} \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = -(e^{\cos(0)} - e^{\cos(\frac{\pi}{2})}) + (e^{-\cos(\frac{\pi}{2})} - e^{-\cos(\pi)}) \\ &= 2(e - 1). \end{aligned}$$

□

(iii) Behauptung: Es gilt $\int_0^1 \frac{1}{1 + \sqrt{x}} dx = 2 - \log(4)$.

Beweis: Wir verwenden die Substitution $y = \sqrt{x}$. Damit erhalten wir mit Hilfe partieller Integration

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{1 + \sqrt{x}} dx &= \int_0^1 \frac{1}{1 + y} 2y dy = 2 \left([y \log(1 + y)]_0^1 - \int_0^1 \log(1 + y) dy \right) \\ &= 2 \left(\log(2) - \left[(1 + y)(\log(1 + y) - 1) \right]_0^1 \right) \\ &= 2(\log(2) - 2(\log(2) - 1) + (\log(1) - 1)) \\ &= 2(1 - \log(2)) = 2 - \log(4). \end{aligned}$$

□

Lösungsvorschlag zur Modulprüfung Analysis II

27.09.2018

Aufgabe 1:

Es sei $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{y(\sqrt{5+|x|} - \sqrt{5})^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Bestimmen Sie sämtliche $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ in denen f stetig ist.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1:

Behauptung: f ist auf $\mathbb{R}^2$ stetig.

Beweis: Da $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ offen ist, ist f auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ als Verkettung stetiger Funktionen stetig. Es bleibt die Stetigkeit in $(0, 0)$ zu prüfen. Für $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ gilt

$$\begin{aligned} |f(x, y) - f(0, 0)| &= \left| \frac{y(\sqrt{5+|x|} - \sqrt{5})^2}{x^2 + y^2} \right| = \left| \frac{y(\sqrt{5+|x|} - \sqrt{5})^2}{x^2 + y^2} \cdot \frac{(\sqrt{5+|x|} + \sqrt{5})^2}{(\sqrt{5+|x|} + \sqrt{5})^2} \right| \\ &= \left| \frac{y(5 + |x| - 5)^2}{(x^2 + y^2)(\sqrt{5+|x|} + \sqrt{5})^2} \right| = \frac{|y|x^2}{(x^2 + y^2)(\sqrt{5+|x|} + \sqrt{5})^2} \\ &\leq \frac{|y|}{(\sqrt{5+|x|} + \sqrt{5})^2} \rightarrow 0 \quad ((x, y) \rightarrow (0, 0)), \end{aligned}$$

wobei in der letzten Abschätzung die Ungleichung $\frac{x^2}{x^2 + y^2} \leq 1$ verwendet wurde. Damit folgt $f(x, y) \rightarrow f(0, 0)$ für $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ und somit ist f auch in $(0, 0)$ stetig. Insgesamt ist f also stetig auf ganz $\mathbb{R}^2$. $\square$

Aufgabe 2:

Die Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x, y) := 2x^2 - x^4 - y^2 + e^{-y^2} \quad \text{für alle } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

(i) Bestimmen Sie alle lokalen Extrema von f .

(ii) Berechnen Sie $\inf_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} f(x, y)$ und $\sup_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} f(x, y)$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 2:

(i) Behauptung: f hat in $(1, 0)$ und $(-1, 0)$ lokale Maxima.

Beweis: f ist zweimal stetig partiell differenzierbar, also gilt $f \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Die notwendige Bedingung für lokale Extrema in $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ lautet

$$0 \stackrel{!}{=} f'(x, y) = (4x - 4x^3, -2y - 2ye^{-y^2}) \Leftrightarrow \begin{cases} x(1 - x^2) = 0, \\ -2y(1 + e^{-y^2}) = 0. \end{cases}$$

Lösen dieses Gleichungssystems liefert die stationären Punkte $(0, 0)$, $(1, 0)$ und $(-1, 0)$.

Für $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 4 - 12x^2 & 0 \\ 0 & -2 + 2(2y^2 - 1)e^{-y^2} \end{pmatrix}.$$

- $(0, 0)$: Hier gilt $H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$ und somit $\det(H_f(0, 0)) = -16 < 0$, d.h. $H_f(0, 0)$ ist indefinit. Nach Satz 8.2 hat f in $(0, 0)$ also kein lokales Extremum.
- $(1, 0)$: Hier gilt $H_f(1, 0) = \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$ und somit $\det(H_f(1, 0)) = 32 > 0$ und $(H_f(1, 0))_{11} = -8$, d.h. $H_f(1, 0)$ ist negativ definit. Nach Satz 8.2 hat f in $(1, 0)$ also ein lokales Maximum.
- $(-1, 0)$: Hier gilt $H_f(-1, 0) = \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$ und somit $\det(H_f(-1, 0)) = 32 > 0$ und $(H_f(-1, 0))_{11} = -8$, d.h. $H_f(-1, 0)$ ist negativ definit. Nach Satz 8.2 hat f in $(-1, 0)$ also ein lokales Maximum. $\square$

(ii) Behauptung: Es gilt $\inf_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} f(x, y) = -\infty$ und $\sup_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} f(x, y) = 2$

Beweis: Es gilt $f(x, y) = 1 - (x^2 - 1)^2 - y^2 + e^{-y^2}$ für $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, d.h. $f(x, y) \rightarrow -\infty$ für $\|(x, y)\| \rightarrow \infty$. Damit gilt $\inf_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} f(x, y) = -\infty$. Weiter gilt $f(1, 0) = f(-1, 0) = 2$. Da dies die einzigen lokalen Extrema sind, folgt $\sup_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} f(x, y) = \max_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} f(x, y) = 2$. $\square$

Aufgabe 3:

(i) Formulieren Sie den Mittelwertsatz im $\mathbb{R}^n$.

(ii) Sei $R > 0$ und $D_R := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < R\}$, sowie $f_R: D_R \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f_R(x) := -(1 + \|x\|)e^{-\|x\|} \quad \text{für alle } x \in D_R.$$

Zeigen Sie, dass f_R auf D_R differenzierbar ist und geben Sie die Ableitung an.

(iii) Zeigen Sie, dass f_R auf D_R Lipschitz-stetig ist mit Lipschitz-Konstante

$$L_R = \begin{cases} Re^{-R}, & \text{falls } R \leq 1, \\ \frac{1}{e}, & \text{falls } R > 1. \end{cases}$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 3:

(i) Der Mittelwertsatz im $\mathbb{R}^n$ besagt:

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $D \neq \emptyset$ und $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Weiter seien $x, y \in D$ mit $S[x, y] \subseteq D$. Dann existiert ein $\xi \in S[x, y]$ mit

$$f(x) - f(y) = f'(\xi) \cdot (x - y).$$

(ii) Behauptung: f_R ist auf D_R differenzierbar mit Ableitung $f'_R(x) = xe^{-\|x\|}$ für alle $x \in D_R$.

Beweis: Auf $D_R \setminus \{0\}$ ist f_R differenzierbar nach der Kettenregel mit Ableitung $f'_R(x) = xe^{-\|x\|}$ für alle $x \in D_R \setminus \{0\}$. (Beachte: $\|\cdot\|$ ist in 0 nicht differenzierbar.) Für $x = 0$ gilt

$$\begin{aligned} \lim_{\|h\| \rightarrow 0} \left| \frac{f_R(h) - f_R(0) - 0 \cdot h}{\|h\|} \right| &= \lim_{\|h\| \rightarrow 0} \left| \frac{-(1 + \|h\|)e^{-\|h\|} + 1}{\|h\|} \right| \\ &= \lim_{r \rightarrow 0+} \left| \frac{-(1 + r)e^{-r} + 1}{r} \right| = \left. \frac{d}{dr} (-(1 + r)e^{-r}) \right|_{r=0} \\ &= re^{-r} \Big|_{r=0} = 0, \end{aligned}$$

d.h. es gilt $f'_R(0) = 0$. Also ist f_R auf ganz D_R differenzierbar mit Ableitung $f'_R(x) = xe^{-\|x\|}$ für alle $x \in D_R$. $\square$

(iii) Behauptung: f_R auf D_R Lipschitz-stetig ist mit Lipschitz-Konstante

$$L_R = \begin{cases} Re^{-R}, & R \leq 1, \\ \frac{1}{e}, & R > 1. \end{cases}$$

Beweis: f_R ist nach Teil (ii) differenzierbar mit

$$f'_R(x) = xe^{-\|x\|} \quad \text{für alle } x \in D_R.$$

Da D_R offen, konvex und nichtleer ist, existiert zu $x, y \in D_R$ nach dem Mittelwertsatz ein $\xi \in S[x, y] \subseteq D$ mit

$$f_R(x) - f_R(y) = f'_R(\xi) \cdot (x - y) \Rightarrow |f_R(x) - f_R(y)| = |f'_R(\xi) \cdot (x - y)| \leq \|f'_R(\xi)\| \|x - y\|.$$

Mit der Abbildung $\varphi: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi(r) := re^{-r}$ gilt $\|f'_R(\xi)\| = \|\xi\|e^{-\|\xi\|} = \varphi(\|\xi\|)$. Weiter ist φ differenzierbar mit Ableitung $\varphi'(r) = (1 - r)e^{-r}$. Somit erhält man

$$\varphi'(r) \begin{cases} > 0, & r \in [0, 1), \\ < 0, & r \in (1, \infty), \end{cases}$$

d.h. φ ist auf $[0, 1)$ streng monoton wachsend, auf $(1, \infty)$ streng monoton fallend und hat in 1 ein globales Maximum. Außerdem gilt $\varphi(r) \leq \varphi(1) = \frac{1}{e}$ für alle $r \geq 1$. Daher ist

$$\tilde{\varphi}: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \tilde{\varphi}(r) := \begin{cases} \varphi(r) = re^{-r}, & r \leq 1, \\ \frac{1}{e}, & r > 1 \end{cases}$$

monoton wachsend und es gilt $\varphi(r) \leq \tilde{\varphi}(r)$ für alle $r \in [0, \infty)$. Damit erhält man

$$\|f'_R(\xi)\| = \varphi(\|\xi\|) \leq \tilde{\varphi}(\|\xi\|) \leq \tilde{\varphi}(R),$$

also die gesuchte Lipschitz-Konstante. $\square$

Aufgabe 4:

Zeigen Sie, dass eine offene Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}$ von 1 und eine stetig differenzierbare Funktion $g = (g_1, g_2): U \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $g(1) = (1, 0)$ existiert, sodass $(x, g_1(x), g_2(x))$ für alle $x \in U$ das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x^2 z \arctan(y) + e^z &= 1, \\ xy^2 + \sin(xz) &= 1 \end{aligned} \quad (1)$$

löst. Bestimmen Sie außerdem $g'(1)$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 4:

Behauptung: Es existiert eine offene Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}$ von 1 und eine stetig differenzierbare Funktion $g: U \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $g(1) = (1, 0)$, sodass $(x, g(x))$ für alle $x \in U$ das Gleichungssystem (1) löst.

Beweis: Da alle Komponentenfunktionen von

$$F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad F(x, y, z) := (x^2 z \arctan(y) + e^z - 1, xy^2 + \sin(xz) - 1) \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

stetig partiell differenzierbar sind, gilt $F \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ mit

$$F'(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2xz \arctan(y) & \frac{x^2 z}{1+y^2} & x^2 \arctan(y) + e^z \\ y^2 + z \cos(xz) & 2xy & x \cos(xz) \end{pmatrix}$$

für alle $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ und somit $\frac{\partial F}{\partial(y,z)}(1, 1, 0) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\pi}{4} + 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, d.h. es gilt $\det \frac{\partial F}{\partial(y,z)}(1, 1, 0) = -(\frac{\pi}{2} + 2) \neq 0$.

Außerdem gilt $F(1, 1, 0) = 0$. Nach dem Satz über implizit definierte Funktionen existieren eine offene Umgebung von 1 und eine Funktion $g \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ mit $g(1) = (1, 0)$ und $F(x, g(x)) = 0$ für alle $x \in U$. Da ein Tupel $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ die Gleichung (1) genau dann löst, wenn $F(x, y, z) = 0$, folgt die Behauptung. $\square$

Behauptung: Es gilt $g'(1) = (-\frac{1}{2}, 0)$.

Beweis: Der Satz über implizit definierte Funktionen liefert

$$g'(1) = - \left(\frac{\partial F}{\partial(y,z)}(1, 1, 0) \right)^{-1} \left(\frac{\partial F}{\partial x}(1, 1, 0) \right) = \frac{2}{\pi + 4} \begin{pmatrix} 1 & -(\frac{\pi}{4} + 1) \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$\square$

Aufgabe 5:

Zeigen Sie, dass es genau ein $f_* \in C([0, 1], \mathbb{R})$ gibt mit

$$f_*(x) = 1 + \frac{1}{2} \int_0^x f_*(t) dt \quad \text{für alle } x \in [0, 1]. \quad (2)$$

Bestimmen Sie außerdem f_* .

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 5:

Behauptung: Es gibt genau ein $f_* \in C([0, 1], \mathbb{R})$, welches (2) erfüllt.

Beweis: Sei $X := C([0, 1], \mathbb{R})$. Nach der Vorlesung ist X ein Banachraum. Definiere die Abbildung $F: X \rightarrow X$ durch

$$F(f)(x) := 1 + \frac{1}{2} \int_0^x f(t) dt \quad \text{für alle } x \in [0, 1].$$

(Beachte: $F(f)$ ist nach dem Hauptsatz stetig für $f \in X$.) Dann gilt für $f, g \in X$:

$$\begin{aligned} \|F(f) - F(g)\|_\infty &= \left\| 1 + \frac{1}{2} \int_0^x f(t) dt - 1 - \frac{1}{2} \int_0^x g(t) dt \right\|_\infty = \max_{x \in [0, 1]} \left| \frac{1}{2} \int_0^x (f(t) - g(t)) dt \right| \\ &\leq \frac{1}{2} \|f - g\|_\infty \max_{x \in [0, 1]} \int_0^x 1 dt \leq \frac{1}{2} \|x - y\|_\infty, \end{aligned}$$

d.h. F ist kontrahierend auf X . Nach dem Banachschen Fixpunktsatz existiert also genau ein Fixpunkt $f_* \in X$ mit $f_* = F(f_*)$, also erfüllt f_* die Gleichung (2). $\square$

Behauptung: Es gilt $f_*(x) = e^{\frac{x}{2}}$ für alle $x \in [0, 1]$.

Beweis: Setzt man $f_0 \equiv 0$, so erhält man für $x \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} f_1(x) &= F(f_0)(x) = 1 + \frac{1}{2} \int_0^x 0 dt = 1, \\ f_2(x) &= F(f_1)(x) = 1 + \frac{1}{2} \int_0^x 1 dt = 1 + \frac{x}{2}, \\ f_3(x) &= F(f_2)(x) = 1 + \frac{1}{2} \int_0^x \left(1 + \frac{t}{2} \right) dt = 1 + \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{x}{2} \right)^2. \end{aligned}$$

Man vermutet somit $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} \left(\frac{x}{2} \right)^k$ ($x \in [0, 1]$) für alle $n \in \mathbb{N}$ und beweist dies mittels vollständiger Induktion:

IA: Es gilt $1 = f_1(x) = \sum_{k=0}^{1-1} \frac{1}{k!} \left(\frac{x}{2} \right)^k$ ($x \in [0, 1]$).

IV: Für ein $n \in \mathbb{N}$ gelte bereits $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} \left(\frac{x}{2} \right)^k$ ($x \in [0, 1]$).

IS ($n \rightsquigarrow n+1$): Für $x \in [0, 1]$ gilt

$$\begin{aligned} f_{n+1}(x) &= F(f_n)(x) = 1 + \frac{1}{2} \int_0^x f_n(t) dt = 1 + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} \left(\frac{1}{2} \right)^k \int_0^x t^k dt \\ &= 1 + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} \left(\frac{1}{2} \right)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} = 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(k+1)!} \left(\frac{1}{2} \right)^{k+1} x^{k+1} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \left(\frac{x}{2} \right)^k \end{aligned}$$

Nach dem Banachschen Fixpunktsatz erhält man also $f_*(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = e^{\frac{x}{2}}$ für alle $x \in [0, 1]$. $\square$

Hinweis: Alternativ kann hier auch das Anfangswertproblem

$$f'_* = -\frac{1}{2}f_*, \quad f_*(0) = 1$$

gelöst werden.

Aufgabe 6:

Der Weg $\gamma: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ sei definiert durch

$$\gamma(t) := (t, \sin(t), \cos(t)) \quad \text{für alle } t \in [0, \pi].$$

(i) Berechnen Sie die Weglänge $L(\gamma)$. Ist γ nach der Weglänge parametrisiert?

(ii) Sei $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$f(x, y, z) := (z, xz, z - xy) \quad \text{für alle } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Berechnen Sie $\int_\gamma f(x, y, z) \cdot d(x, y, z)$.

(iii) Berechnen Sie $\int_\gamma (1+z)e^{x+y} ds$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 6:

(i) Behauptung: Es gilt $L(\gamma) = \sqrt{2}\pi$.

Beweis: Alle Komponentenfunktionen von γ sind differenzierbar, also gilt $\gamma \in C^1([0, \pi], \mathbb{R}^3)$ mit $\gamma'(t) = (1, \cos(t), -\sin(t))$ für alle $t \in [0, \pi]$. Daher gilt

$$L(\gamma) = \int_0^\pi \|\gamma'(t)\| dt = \int_0^\pi \sqrt{1 + \cos^2(t) + \sin^2(t)} dt = \sqrt{2}\pi.$$

Wegen $\sqrt{2}\pi \neq \pi$ ist γ nicht nach der Weglänge parametrisiert. □

(ii) Behauptung: Es gilt $\int_\gamma f(x, y, z) \cdot d(x, y, z) = \frac{1}{2}\pi^2$.

Beweis: Es gilt

$$\begin{aligned} \int_\gamma f(x, y, z) \cdot d(x, y, z) &= \int_0^\pi f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \int_0^\pi (\cos(t) + t \cos^2(t) - \cos(t) \sin(t) + t \sin^2(t)) dt \\ &= \int_0^\pi \left(\cos(t) + t - \frac{1}{2} \sin(2t) \right) dt = \left[\sin(t) + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{4} \cos(2t) \right]_0^\pi = \frac{1}{2}\pi^2. \end{aligned}$$

□

(iii) Behauptung: Es gilt $\int_\gamma (1+z)e^{x+y} ds = \sqrt{2}(e^\pi - 1)$.

Beweis: Die Weglängenfunktion lautet $s: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$, $s(t) = \sqrt{2}t$. Damit gilt

$$\int_\gamma (1+z)e^{x+y} ds = \int_0^\pi (1 + \cos(t))e^{t+\sin(t)}\sqrt{2} dt = \sqrt{2} \left[e^{t+\sin(t)} \right]_0^\pi = \sqrt{2}(e^\pi - 1).$$

□

Aufgabe 7:

Berechnen Sie die Lösung des folgenden Anfangswertproblems

$$y' = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix} \cdot y, \quad y(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 7:

Behauptung: Die Lösung des Anfangswertproblems ist gegeben durch

$$y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad y(x) = (2 \cosh(x), -e^x, 2 \cosh(x)).$$

Beweis: Zunächst berechnet man die Eigenwerte der Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Es gilt $\det(A - \lambda I) = (\lambda + 1)(\lambda - 1)^2$, d.h. A hat die Eigenwerte $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = 1$. Für die Eigenräume gilt:

- $\lambda_1 = -1$: $E_{-1} = \ker(A - \lambda_1 I) = \text{span} \{(1, 0, 1)^T\}$.
- $\lambda_2 = 1$: $E_1 = \ker(A - \lambda_2 I) = \text{span} \{(1, 1, 0)^T, (2, 0, 1)^T\}$.

Damit ist die allgemeine Lösung der DGL gegeben durch

$$y(x) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-x} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^x + c_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^x,$$

wobei $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}$.

Einsetzen des Anfangswertes liefert $c_1 = 1$, $c_2 = -1$ und $c_3 = 1$, d.h.

$$y(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^x + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^x = \begin{pmatrix} 2 \cosh(x) \\ -e^x \\ 2 \cosh(x) \end{pmatrix}.$$

□

Lösungsvorschläge Analysis III Klausur Herbst 2018

Aufgabe 1

- a) Seien $X \subseteq \mathbb{R}^d$ eine Menge mit endlich vielen Elementen und $\mathcal{K} := \{\{x\} \mid x \in X\}$ die Menge aller einelementigen Teilmengen von X . Zeigen Sie, dass dann $X \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ und $\sigma(\mathcal{K}) = \mathcal{B}(X) = \mathcal{P}(X)$ gelten.
- b) Gegeben sei die σ -Algebra $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$. Weiter definieren wir die Abbildung

$$\mu(A) := \begin{cases} \infty & \text{falls } |A| \text{ unendlich,} \\ 0 & \text{falls } |A| \text{ endlich,} \end{cases}$$

für $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Hierbei bezeichnet $|A|$ die Anzahl der Elemente einer Menge $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Definiert μ ein Maß auf $\mathcal{P}(\mathbb{N})$? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösungsvorschlag Aufgabe 1

- a) Zunächst ist jede einelementige Menge abgeschlossen und damit auch X als endliche Vereinigung einelementiger (abgeschlossener) Mengen. Also ist $X \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Die Inklusion $\mathcal{B}(X) \subseteq \mathcal{P}(X)$ ist klar, da $\mathcal{P}(X) = \{A \mid A \subseteq X\}$ die feinste σ -Algebra über X ist. Es bleibt $\mathcal{P}(X) \subseteq \sigma(\mathcal{K})$ zu zeigen. Dann folgt nämlich $\sigma(\mathcal{K}) \subseteq \mathcal{B}(X) \subseteq \mathcal{P}(X) \subseteq \sigma(\mathcal{K})$, da $\mathcal{K}$ nach obiger Argumentation ebenfalls Teilmenge von $\mathcal{B}(X)$ ist und $\sigma(\mathcal{K})$ die kleinste σ -Algebra ist, die $\mathcal{K}$ enthält. Sei also $A \in \mathcal{P}(X)$. Dann ist $A = \bigcup_{x \in A} \{x\} \in \sigma(\mathcal{K})$, da die einelementige Menge $\{x\}$ in $\mathcal{K}$ enthalten ist für jedes $x \in A$, die Vereinigung abzählbar ist und $\sigma(\mathcal{K})$ eine σ -Algebra ist. Also folgt $\mathcal{P}(X) \subseteq \sigma(\mathcal{K})$.
- b) Zunächst ist $\mu(A) \geq 0$ für alle $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Weiter gilt $\mu(\emptyset) = 0$, da $\emptyset$ endlich ist. Also ist (M1) erfüllt. Sei nun $A_j := \{j\}$ für $j \in \mathbb{N}$. Dann ist $(A_j)_j$ eine disjunkte Folge in $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ und es gilt $\mu(A_j) = 0$ für $j \in \mathbb{N}$, da A_j einelementig ist. Allerdings gilt auch die Ungleichung

$$\mu\left(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j\right) = \mu(\mathbb{N}) = \infty > 0 = \sum_{j \in \mathbb{N}} \mu(A_j).$$

Also ist μ kein Maß auf $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Aufgabe 2

- a) Seien X, Y nichtleere Mengen, $\mathcal{A}$ eine σ -Algebra auf X , sowie $\mathcal{B}$ eine σ -Algebra auf Y . Weiter sei $f : X \rightarrow Y$ eine Funktion. Wann heißt f $\mathcal{A}$ - $\mathcal{B}$ -messbar?
- b) Formulieren Sie den Satz von Beppo Levi (Satz von der monotonen Konvergenz).
- c) Formulieren Sie den Satz von Fubini.

Lösungsvorschlag Aufgabe 2

- a) Die Abbildung f heißt genau dann $\mathcal{A}$ - $\mathcal{B}$ -messbar, wenn für jede Menge $B \in \mathcal{B}$ die Beziehung $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ gilt.
- b) Seien $X \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ und $(f_n)_n$ eine Folge messbarer Funktionen $f_n : X \rightarrow [0, +\infty]$. Weiter gelte $f_n \leq f_{n+1}$ auf X für alle $n \in \mathbb{N}$ und es existiere $f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ für alle $x \in X$. Dann ist die Funktion f messbar und es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n(x) \, dx = \int_X \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \, dx = \int_X f(x) \, dx.$$

- c) Seien $k, l \in \mathbb{N}$, $d := k + l$ und $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ integrierbar. Weiter seien $y_0 \in \mathbb{R}^l$ und $x_0 \in \mathbb{R}^k$. Definiere

$$\begin{aligned} f_{y_0}(x) &:= f(x, y_0) \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^k, \\ f^{x_0}(y) &:= f(x_0, y) \quad \text{für } y \in \mathbb{R}^l. \end{aligned}$$

Dann existieren solche Nullmengen $M \subseteq \mathbb{R}^k$ und $N \subseteq \mathbb{R}^l$, dass die Funktionen $f^x : \mathbb{R}^l \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ für alle $x \in \mathbb{R}^k \setminus M$ und $f_y : \mathbb{R}^k \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ für alle $y \in \mathbb{R}^l \setminus N$ integrierbar sind. Weiter sind auch die Funktionen

$$\begin{aligned} F(x) &:= \begin{cases} \int_{\mathbb{R}^l} f^x(y) \, dy & x \in \mathbb{R}^k \setminus M, \\ 0 & x \in M, \end{cases} \\ G(y) &:= \begin{cases} \int_{\mathbb{R}^k} f_y(x) \, dx & y \in \mathbb{R}^l \setminus N, \\ 0 & y \in N, \end{cases} \end{aligned}$$

integrierbar und

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(z) \, dz = \int_{\mathbb{R}^k} F(x) \, dx = \int_{\mathbb{R}^l} G(y) \, dy.$$

Aufgabe 3

- a) Sei $q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ messbar mit $\operatorname{esssup}_{x \in \mathbb{R}} |q(x)| = \|q\|_\infty < \infty$. Weiter seien $t \in \mathbb{R}$ und $(t_n)_n$ eine Folge in $\mathbb{R}$ mit $t_n \rightarrow t$, $n \rightarrow \infty$. Schließlich sei $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ für ein $p \in [1, \infty)$. Wir setzen

$$g_n(x) := e^{t_n q(x)} f(x), \quad g(x) := e^{t q(x)} f(x)$$

für $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie die Konvergenz $\|g_n - g\|_{L^p(\mathbb{R})} \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$.

- b) Bestimmen Sie den Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{\cos(n^2 x^2) + n^2 x^2}{\sqrt{x^2 + n^4}} \, dx.$$

Lösungsvorschlag Aufgabe 3

- a) Da die Exponentialfunktion stetig ist, sind die Funktionen g_n und g Verkettungen und Produkte messbarer Funktionen und damit wieder messbar. Weiter existiert so eine Nullmenge $M \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ und $K \in [0, \infty)$, dass $|q(x)| \leq K$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus M$ gilt. Da die Folge $(t_n)_n$ konvergiert, existiert außerdem eine Zahl T mit $|t_n| \leq T$ für $n \in \mathbb{N}$. Somit folgt die Abschätzung

$$|g_n(x)| = e^{t_n |q(x)|} |f(x)| \leq e^{TK} |f(x)|$$

für alle $x \in \mathbb{R} \setminus M$ und $n \in \mathbb{N}$. Mit der Stetigkeit der Exponentialfunktion gilt weiter die Konvergenz

$$g_n(x) = e^{t_n q(x)} f(x) \rightarrow e^{t q(x)} f(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R} \setminus M$. Da $h(x) := \begin{cases} e^{TK} |f(x)| & x \in \mathbb{R} \setminus M, \\ 0 & x \in M, \end{cases}$ eine Funktion in $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ ist, liefert der Satz von Lebesgue die Behauptung.

- b) Definiere $f_n(x) := \frac{\cos(n^2 x^2) + n^2 x^2}{\sqrt{x^2 + n^4}}$ für $x \in [0, 1]$ und $n \in \mathbb{N}$. Da f_n als Komposition stetiger Funktionen stetig ist, ist es insbesondere messbar. Zuerst erhalten wir die Konvergenz

$$f_n(x) = \frac{\cos(n^2 x^2) + n^2 x^2}{\sqrt{x^2 + n^4}} = \frac{\overbrace{\cos(n^2 x^2)}^{\rightarrow 0} + n^2 x^2}{\underbrace{\sqrt{\frac{x^2}{n^4} + 1}}_{\rightarrow 1}} \rightarrow x^2, \quad n \rightarrow \infty.$$

Weiter schätzen wir ab

$$|f_n(x)| \leq \frac{1 + n^2 x^2}{\sqrt{n^4}} = \frac{1}{n^2} + x^2 \leq 1 + x^2 =: g(x), \quad x \in [0, 1], \quad n \in \mathbb{N}.$$

Da die Funktion g als stetige Funktion auf dem Kompaktum $[0, 1]$ beschränkt ist, ist sie dort auch Lebesgue-integrierbar. Wir erhalten erneut mit dem Satz von Lebesgue

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[0,1]} f_n(x) \, dx = \int_{[0,1]} x^2 \, dx = \frac{1}{3}.$$

Aufgabe 4

Es sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar und

$$F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(t-x)^2} f(x) \, dx.$$

- a) Formulieren Sie den Differenzierbarkeitssatz für Parameterintegrale.
 b) Zeigen Sie, dass F differenzierbar ist und berechnen Sie die Ableitung.

Lösungsvorschlag Aufgabe 4

a) Seien $U \subseteq \mathbb{R}^k$ offen, $X \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, $h : U \times X \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, $g : X \rightarrow [0, +\infty]$ integrierbar und $N \subseteq X$ eine Nullmenge mit den folgenden Eigenschaften.

- (i) Für festes $t \in U$ ist die Abbildung $x \mapsto h(t, x)$ integrierbar.
- (ii) Ist $x \in X \setminus N$, so ist $U \ni t \mapsto h(t, x)$ partiell differenzierbar.
- (iii) Die Abschätzung

$$\left| \frac{\partial h}{\partial t_j}(t, x) \right| \leq g(x)$$

ist für jedes $t \in U$, $x \in X \setminus N$ und $j \in \{1, \dots, k\}$ erfüllt.

Dann ist die Funktion $H : U \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto \int_X h(t, x) \, dx$ partiell differenzierbar mit

$$\frac{\partial H}{\partial t_j}(t) = \int_X \frac{\partial h}{\partial t_j}(t, x) \, dx, \quad t \in U, \quad j \in \{1, \dots, k\}.$$

b) Sei $x \in \mathbb{R}$. Dann gelten die Abschätzungen

$$|F(x)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{e^{-(x-y)^2}}_{\leq 1} |f(y)| \, dy \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R})} < \infty,$$

da f integrierbar ist.

Wir prüfen im Folgenden die Voraussetzungen des Differenzierbarkeitssatzes nach. Dazu setzen wir

$$h(t, x) := e^{-(t-x)^2} f(x), \quad t, x \in \mathbb{R},$$

was als Produkt messbarer Funktionen wieder messbar ist. Obige Ungleichung zeigt, dass $h(t, \cdot)$ für jedes $t \in \mathbb{R}$ integrierbar ist, also gilt (i).

Weiter ist die Exponentialfunktion beliebig oft stetig differenzierbar und damit auch $h(\cdot, x)$ für jedes feste $x \in \mathbb{R}$. Wir erhalten

$$\frac{\partial h}{\partial t}(t, x) = -2(t-x)e^{-(t-x)^2} f(x)$$

für alle $(t, x) \in \mathbb{R}^2$, also gilt (ii).

Für $y \in \mathbb{R}$ gilt

$$|ye^{-y^2}| = |y|e^{-y^2} \leq e^{|y|-y^2} \leq \begin{cases} e^{|y|} & |y| < 2, \\ e^{-1/2y^2} & |y| \geq 2, \end{cases} \leq e^2,$$

wobei wir die Ungleichung $1 + |y| \leq e^{|y|}$ verwenden. Damit ergibt sich

$$\left| \frac{\partial h}{\partial t}(t, x) \right| \leq 2e^2 |f(x)|$$

für alle $t, x \in \mathbb{R}$. Da f integrierbar ist, ist auch (iii) erfüllt. Wir schließen mit dem Differenzierbarkeitssatz für Parameterintegrale, dass F differenzierbar ist mit

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial h}{\partial t}(t, x) \, dx = -2 \int_{-\infty}^{\infty} (t-x)e^{-(t-x)^2} f(x) \, dx.$$

Aufgabe 5

Seien $v = (v_1, \dots, v_4) \in \mathbb{R}^4$ mit $v_1 > 0$ und $K := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\|_2 \leq r\}$ die 3-dimensionale Kugel mit Radius $r > 0$. Hierbei ist $\|\cdot\|_2$ die euklidische Norm in $\mathbb{R}^3$. Weiter bezeichne

$$C := \{(1-s)(0, y) + sv \in \mathbb{R}^4 \mid y \in K, s \in [0, 1]\}$$

den 4-dimensionalen Kegel mit Spitze v .

- Begründen Sie, dass C messbar ist (das heißt $C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^4)$ ist).
- Beweisen Sie die Gleichung $\lambda_4(C) = \frac{v_1}{4} \lambda_3(K)$. Hierbei bezeichnet λ_d das d -dimensionale Lebesguemaß.

Lösungsvorschlag Aufgabe 5

- Der Kegel C ist messbar, da er abgeschlossen ist. Das sieht man wie folgt ein. Sei $(x_n)_n$ eine Folge in C , die gegen ein $x \in \mathbb{R}^4$ konvergiert. Dann existieren Folgen $(s_n)_n$ in $[0, 1]$ und $(y_n)_n$ in K mit

$$x_n = (1 - s_n)(0, y_n) + s_n v, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Insbesondere konvergiert die Folge der ersten Komponenten $(x_n^1)_n$, also $x_n^1 = s_n v_1 \rightarrow x^1$. Da $v_1 > 0$ und $[0, 1]$ abgeschlossen sind, schließen wir, dass die Folge $(s_n)_n$ gegen ein $s \in [0, 1]$ konvergiert. Also konvergiert auch die Folge mit den Gliedern $(1 - s_n)(0, y_n)$. Ist letztere Folge eine Nullfolge, so ist $x = sv \in C$. Ist sie keine Nullfolge, so kann $(s_n)_n$ nicht gegen 1 konvergieren, da $(y_n)_n$ beschränkt ist. Also konvergiert auch die Folge $(y_n)_n$, und zwar gegen ein $y \in K$, da K abgeschlossen ist. In jedem Fall liegt $x \in C$.

- Mit Teil a) ist das Prinzip von Cavalieri anwendbar. Schreibe $x = (x_1, \dots, x_4) \in \mathbb{R}^4$ für $x \in \mathbb{R}^4$. Für $x_1 \notin [0, v_1]$ ist der Schnitt $C^{x_1} = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid (x_1, v) \in C\}$ leer. Für $x_1 \in [0, v_1]$ setze $s := \frac{x_1}{v_1} \in [0, 1]$ und es folgt

$$C^{x_1} = \{(1-s)y + s(v_2, \dots, v_4) \mid y \in K\}.$$

Also gilt mit der Translationsinvarianz des Lebesguemaßes, dem Transformationssatz und dem Satz von Tonelli

$$\begin{aligned} \lambda_3(C^{x_1}) &= \lambda_3(\{(1-s)y \mid y \in K\}) = \int_0^{r(1-s)} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \tilde{r}^2 \sin \theta \, d\varphi \, d\theta \, d\tilde{r} = 4\pi \int_0^{r(1-s)} \tilde{r}^2 \, d\tilde{r} \\ &= \frac{4}{3} \pi (r(1-s))^3 = \frac{4}{3} \pi \left(r \left(1 - \frac{x_1}{v_1}\right)\right)^3. \end{aligned}$$

Mit dem Prinzip von Cavalieri folgt

$$\lambda_4(C) = \int_0^{v_1} \lambda_3(C^{x_1}) \, dx_1 = \frac{4}{3} \pi \int_0^{v_1} \left(r \left(1 - \frac{x_1}{v_1}\right)\right)^3 \, dx_1 = \frac{v_1}{4} \lambda_3(K).$$

Aufgabe 6

Gegeben sei die Funktion $g : \mathbb{R}^3 \setminus (\{(0, 0)\} \times \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$g(x, y, z) := \begin{cases} (x^2 + y^2)^{-1/2} e^{-|z|} & \text{für } 0 < x^2 + y^2 \leq 1, \\ (x^2 + y^2)^{-3/2} e^{-|z|} & \text{für } x^2 + y^2 > 1. \end{cases}$$

Berechnen Sie $\int_{\mathbb{R}^3 \setminus (\{(0, 0)\} \times \mathbb{R})} g(x, y, z) \, d(x, y, z)$.

Lösungsvorschlag Aufgabe 6

Die Menge $A := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 > 1\}$ ist messbar, da sie offen ist. Weiter ist die Menge $B := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 < x^2 + y^2 \leq 1\} = \mathbb{R}^3 \setminus (A \cup (\{(0, 0\} \times \mathbb{R}))$ ebenfalls in $\mathcal{B}(\mathbb{R}^3)$ enthalten. Insgesamt ist

$$g(x, y, z) = (x^2 + y^2)^{-1/2} e^{-|z|} \chi_B(x, y, z) + (x^2 + y^2)^{-3/2} e^{-|z|} \chi_A(x, y, z)$$

auf $\mathbb{R}^3 \setminus (\{(0, 0\} \times \mathbb{R})$ messbar als Komposition messbarer Funktionen. Hierbei stehen χ_A und χ_B für die charakteristischen Funktionen der Mengen A und B .

Wir verwenden Zylinderkoordinaten Φ und erhalten die Darstellungen $A = \Phi(K_1)$ sowie $B = \Phi(K_2)$ mit

$$K_1 := (1, \infty) \times [0, 2\pi] \times \mathbb{R}, \quad K_2 := (0, 1] \times [0, 2\pi] \times \mathbb{R}.$$

Weiter ist Φ auf den offenen Mengen K_1° und K_2° injektiv. Da g positiv ist, erhalten wir mit dem Transformationssatz und dem Satz von Tonelli

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3 \setminus (\{(0,0\} \times \mathbb{R})} g(x, y, z) \, d(x, y, z) &= \int_A g(x, y, z) \, d(x, y, z) + \int_B g(x, y, z) \, d(x, y, z) \\ &= \int_{K_1} g \circ \Phi |\det \Phi'| \, d(r, \varphi, z) + \int_{K_2} g \circ \Phi |\det \Phi'| \, d(r, \varphi, z) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} \int_1^{\infty} r^{-3} e^{-|z|} r \, dr \, d\varphi \, dz \\ &\quad + \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^{-1} e^{-|z|} r \, dr \, d\varphi \, dz \\ &= 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|z|} \, dz + 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|z|} \, dz = 8\pi < \infty. \end{aligned}$$

Aufgabe 7

Sei $X \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Gegeben seien eine Folge $(f_n)_n$ in $L^2(X, \mathbb{R})$ und eine Funktion $f \in L^2(X, \mathbb{R})$ derart, dass die Konvergenz

$$\int_X f_n \varphi \, dx \rightarrow \int_X f \varphi \, dx, \quad n \rightarrow \infty,$$

für alle $\varphi \in L^2(X, \mathbb{R})$ gilt. Folgern Sie die Abschätzung $\liminf_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_{L^2} \geq \|f\|_{L^2}$.

Lösungsvorschlag Aufgabe 7

Ist $\|f\|_{L^2} = 0$, so ist die behauptete Ungleichung klar. Sei also $\|f\|_{L^2} > 0$. Wir wählen $\varphi = f \in L^2(X, \mathbb{R})$ in der vorausgesetzten Konvergenzaussage. Dann erhalten wir mit der Cauchy-Schwarz Ungleichung die Abschätzung

$$\|f\|_{L^2}^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n f \, dx = \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n f \, dx \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_{L^2} \|f\|_{L^2}.$$

Division durch $\|f\|_{L^2}$ ergibt nun die Behauptung.