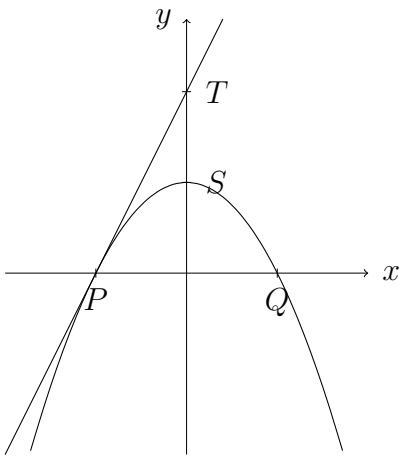
Aufgabe E1 (8 Punkte)

Die Parabel gegeben durch

$$f(x) = -ax^2 + c$$

mit $a > 0$ und $c > 0$ habe den Scheitel S sowie die Nullstellen P und Q. Die Tangente in P schneide die y-Achse in T.

Berechnen Sie das Verhältnis der Längen der Strecken $\overline{OS}$ und $\overline{ST}$.
(Dabei bezeichne O den Koordinatenursprung.)



Lösung: S hat die Koordinaten $(0, c)$.

Die Nullstellen von f sind $\pm\sqrt{\frac{c}{a}}$, also hat P die Koordinaten $(-\sqrt{\frac{c}{a}}, 0)$.
Die Tangente in P hat die Steigung $f'(-\sqrt{\frac{c}{a}}) = 2a\sqrt{\frac{c}{a}}$, ihre Gleichung ist also

$$y = 2a\sqrt{\frac{c}{a}} \cdot x + d,$$

mit $T = (0, d)$. Durch Einsetzen der Koordinaten von P ergibt sich

$$d = 0 - 2a\sqrt{\frac{c}{a}}(-\sqrt{\frac{c}{a}}) = 2c.$$

Somit hat T die Koordinaten $(0, 2c)$ und es ist

$$\frac{\overline{OS}}{\overline{ST}} = \frac{c}{2c - c} = 1.$$

Aufgabe E 2 (8 Punkte)

Bestimmen Sie $u \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$ so, dass die Summe der Kehrwerte der Lösungen der Gleichung

$$u^2x^2 + (u-3)x + \frac{1}{u+1} = 0$$

maximal wird.

Lösung: Für die Lösungen x_1 und x_2 der Gleichung $x^2 + \frac{u-3}{u^2}x + \frac{1}{u^2(u+1)} = 0$ gilt

$$x_1 + x_2 = -\frac{u-3}{u^2} \qquad \text{und} \qquad x_1 \cdot x_2 = \frac{1}{u^2(u+1)},$$

da $(x-x_1)(x-x_2) = x^2 - (x_1+x_2)x + x_1x_2$ ist. Die Summe der Kehrwerte der Lösungen ist also

$$s = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1+x_2}{x_1 \cdot x_2} = \frac{-\frac{u-3}{u^2}}{\frac{1}{u^2(u+1)}} = -(u-3)(u+1) = -u^2 + 2u + 3 = 4 - (u-1)^2.$$

Dies wird maximal, wenn $u - 1 = 0$ ist, also für $u = 1$.

Man kann das Maximum der Funktion $s(u) = -u^2 + 2u + 3$ natürlich auch dadurch bestimmen, dass man die Nullstelle der Ableitung $s'(u) = -2u + 2$ bestimmt.

Aufgabe E 3 (8 Punkte)

Es seien n eine natürliche Zahl, $x = (1 + \frac{1}{n})^n$ und $y = (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$.

Zeigen Sie:

$$y^x = x^y.$$

Lösung: Es ist $y = x(1 + \frac{1}{n}) = x + \frac{x}{n}$. Also ist

$$y^x = x^x(1 + \frac{1}{n})^x \quad \text{und}$$
$$x^y = x^{x+\frac{x}{n}} = x^x \cdot x^{\frac{x}{n}} = x^x \cdot (x^{\frac{1}{n}})^x.$$

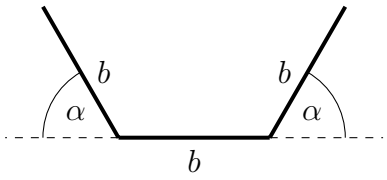
Wegen $x^{\frac{1}{n}} = ((1 + \frac{1}{n})^n)^{\frac{1}{n}} = 1 + \frac{1}{n}$ folgt daraus

$$x^y = x^x(1 + \frac{1}{n})^x = y^x.$$

Aufgabe E 4 (8 Punkte)

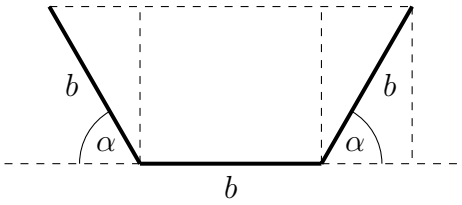
Aus drei gleichen Brettern der Breite b soll nach nebenstehender Skizze eine Dachrinne hergestellt werden.

Für welchen Neigungswinkel α der Seitenbretter ist die Querschnittsfläche am größten?



Lösung: Das rechtwinklige Dreieck mit dem Winkel α hat die Seiten $b \cdot \cos\alpha$ (horizontal) und $b \cdot \sin\alpha$ (vertikal). Damit ist die Querschnittsfläche der Rinne

$$F(\alpha) = b \cdot b\sin\alpha + 2 \cdot \frac{1}{2} b\cos\alpha \cdot b\sin\alpha = b^2 \sin\alpha(1+\cos\alpha).$$



Ist $F(\alpha)$ maximal, so muss gelten:

$$F'(\alpha) = b^2(\cos\alpha(1+\cos\alpha) - \sin^2\alpha) = 0.$$

Dies führt auf

$$\cos\alpha(1+\cos\alpha) = \sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$$

und damit auf die quadratische Gleichung

$$\cos^2\alpha + \frac{1}{2}\cos\alpha - \frac{1}{2} = 0$$

mit den beiden Lösungen

$$\cos\alpha = -\frac{1}{4} \pm \frac{1}{4} \cdot 3.$$

$\cos\alpha = -1$ führt auf $F(\alpha) = 0$, also ein Minimum.

Somit ist $\cos\alpha = \frac{1}{2}$, also $\alpha = 60°$, die gesuchte Lösung.