Universität Karlsruhe (TH)
Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Enrico Leuzinger
Dr. Andreas Weber

Riemann'sche Geometrie

Übungsblatt 8 **Sommersemester 2007**

Aufgabe 1. Schnittkrümmung der hyperbolischen Ebene H^2.

Bestimmen Sie die Komponenten R^m_{ijk} des Riemann'schen Krümmungstensors R der hyperbolischen Ebene H^2 bezüglich der Karte (H^2, id) und berechnen Sie dann deren Schnittkrümmung.

Aufgabe 2. Lie-Gruppen mit bi-invarianter Metrik.

Sei G eine Lie-Gruppe mit bi-invarianter Riemann'scher Metrik $\langle\cdot,\cdot\rangle$, d.h. die Abbildungen $L_a : G \to G, g \mapsto ag$ und $R_a : G \to G, g \mapsto ga$ sind für alle $a \in G$ Isometrien.

(a) Seien X und Y linksinvariante Vektorfelder auf G, d.h. für alle $g \in G$ gilt $X_g = dL_g\big|_e X_e$ bzw. $Y_g = dL_g\big|_e Y_e$. Zeigen Sie, dass gilt:

$$D_X Y = \frac{1}{2}[X,Y].$$

Sie dürfen verwenden, dass für linksinvariante Vektorfelder X, Y, Z und eine bi-invariante Metrik $\langle\cdot,\cdot\rangle$ folgendes gilt:

$$\langle [X,Y], Z\rangle = -\langle Y, [X,Z]\rangle.$$

(b) Zeigen Sie, dass für linksinvariante Vektorfelder X, Y, Z gilt:

$$R(X,Y)Z = \frac{1}{4}[[X,Y],Z].$$

(c) Seien $X_e, Y_e \in T_eG$ orthonormal. Zeigen Sie, dass für die Schnittkrümmung im Punkt e

$$K_e(X_e, Y_e) = \frac{1}{4}||[X,Y]_e||_{T_eG}$$

gilt, wobei X und Y die linksinvarianten Vektorfelder mit $X(e) = X_e$ und $Y(e) = Y_e$ sind. Folgern Sie, dass die Schnittkrümmung überall nicht-negativ ist.

Bemerkung: Auf der Lie-Gruppe $O(n)$ wird durch

$$g_P(X,Y) := \mathrm{Spur}\left(P^{-1}X(P^{-1}Y)^\top\right), \qquad P \in O(n),\ X, Y \in \mathcal{T}_P O(n),$$

eine bi-invariante Metrik definiert.

Aufgabe 3. Lokal symmetrische Räume.

Die kovariante Ableitung DR des Riemann'schen Krümmungstensors R auf einer Riemann'schen Mannigfaltigkeit M ist ein $(1,4)$-Tensorfeld mit

$$DR(X,Y,Z,W) := D_W\big(R(X,Y)Z\big) - R(D_W X, Y)Z - R(X, D_W Y)Z - R(X,Y)D_W Z$$

für $X, Y, Z, W \in \mathcal{V}M$.

(a) Zeigen Sie, dass genau dann $DR = 0$ gilt, wenn für alle parallelen Vektorfelder X, Y, Z entlang einer (beliebigen) Kurve c auch das Vektorfeld $R(X,Y)Z$ auf c parallel ist.
Bemerkung: Eine Riemann'sche Mannigfaltigkeit M mit $DR = 0$ heißt *lokal symmetrisch*.

(b) Zeigen Sie, dass jede Riemann'sche Mannigfaltigkeit mit konstanter Schnittkrümmung lokal symmetrisch ist.

Abgabe der Lösungen bis zum **Donnerstag**, den 28. 6. 2007 um 13:00 Uhr in den entsprechenden Briefkasten neben dem Seminarraum 32 im Mathematikgebäude. Die Abgabe darf auch in Zweiergruppen erfolgen. Bitte vermerken Sie auf Ihrer Abgabe jeweils *Name* und *Matrikelnummer*. Jede Aufgabe wird mit maximal 4 Punkten bewertet. Die Übungsblätter stehen auch unter

http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/iag2/lehre/riemgeo2007s/de

zum Download bereit.