

Eulerscher Polyedersatz

Seien E die Anzahl der Ecken, F die Anzahl der Flächen und K die Anzahl der Kanten eines konvexen Polyeders, dann gilt:

$$K - E = F - 2$$

Beweis

Jedes Polyeder lässt sich als planarer Graph mit gleicher Kanten-, Flächen- und Eckenzahl darstellen.

Induktion über die Anzahl der Ecken E .

► Induktionsanfang: $E = 1$

Ein Graph mit nur einer Ecke hat nur reflexive Kanten. Jede dieser Kanten schließt eine Fläche ein.

Es gilt also:

$$F = K + 1$$

$$K - E = F - 2 \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow K - 1 = K + 1 - 2 \quad (2)$$

$$\Leftrightarrow K = K \quad (3)$$

Anzahl

nur diese 5 platonische Körper:

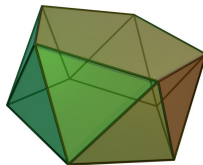
- ▶ $\sum \alpha < 360^\circ$
- ▶ $\sum \alpha = 360^\circ$: Ebene
- ▶ mindestens 3 Flächen pro Ecke

Sind bei einem Körper alle Seitenflächen

- ▶ gleichseitige Dreiecke ($\alpha = 60^\circ$)
 - ▶ 3 Dreiecke: $3\alpha = 180^\circ$
 - ▶ 4 Dreiecke: $4\alpha = 240^\circ$
 - ▶ 5 Dreiecke: $5\alpha = 300^\circ$
- ▶ Quadrate ($\alpha = 90^\circ$)
 - ▶ 3 Quadrate: $3\alpha = 270^\circ$
- ▶ regelmäßige Fünfecke ($\alpha = 108^\circ$)
 - ▶ 3 Fünfecke: $3\alpha = 324^\circ$

Konstruktion eines Ikosaeders:

- ▶ Antiprisma zu einem Fünfeck



- ▶ fünfseitige Pyramide auf Basis und Deckfläche
- ▶ Ikosaeder mit 12 Ecken und 20 gleichseitigen Dreiecken

Das Dodekaeder ergibt sich als duales Polyeder.

Weitere Polyeder:

- ▶ regelmäßige Vielecke als Seitenflächen mit unterschiedlicher Eckenzahl (archimedische Körper)
- ▶ Körper, bei denen nicht an jeder Ecke gleich viele Vielecke zusammentreffen

Dualität

Mittelpunkte benachbarter Seitenflächen verbinden: Dualkörper

- ▶ Zentrum = Zentrum
- ▶ Fläche - Ecke
- ▶ trennende Kante (Fläche) - verbindende Kante(Ecke)
- ▶ Ecke - Fläche

Duale Paare:

- ▶ Tetraeder - Tetraeder
- ▶ Hexaeder - Oktaeder
- ▶ Dodekaeder - Ikosaeder

Symmetrie

Die platonischen Körper zeigen größtmögliche Symmetrie
Die Symmetriegruppe wirkt transitiv auf

- ▶ Ecken
- ▶ Kanten
- ▶ Flächen
- ▶ Fahnen

Duale platonische Körper haben dieselbe Symmetriegruppe:

- ▶ Tetraedergruppe
- ▶ Oktaedergruppe
- ▶ Ikosaedergruppe

Berührende Kugeln

Jeder platonische Körper hat eine

- ▶ Inkugel, die alle seine Flächen berührt
- ▶ Umkugel, auf der alle seine Ecken liegen
- ▶ Kantenkugel, auf der die Mittelpunkte der Kanten liegen.

gemeinsamer Mittelpunkt der Kugeln ist das Zentrum

Platonische Körper als reguläre Parkettierungen der Sphäre

Parkettierung der Kugeloberfläche

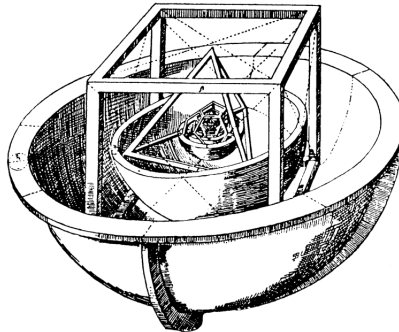
- ▶ durch Projektion der Kanten aus dem Mittelpunkt auf eine Kugel
- ▶ mit zueinander kongruenten regelmäßigen sphärischen Vielecken
- ▶ gleich vielen Kanten (unter gleichen Winkeln) pro Ecke
- ▶ dieselben Symmetrien
- ▶ dieselben Dualitätsbeziehungen

Geschichtliches

- ▶ Pythagoräer (6.Jh.v.Chr.): Tetraeder, Würfel, Dodekaeder
- ▶ Theaitetos (4.Jh.v.Chr.): Oktaeder, Ikosaeder
- ▶ Platon (427 v. Chr. bis 347 v. Chr. in Athen) hat die Körper ausführlich beschrieben und sie den Elementen des platonischen Weltbildes zugeordnet:
 - ▶ Feuer: Tetraeder
 - ▶ Erde: Hexaeder
 - ▶ Luft: Oktaeder
 - ▶ Geist: Dodekaeder
 - ▶ Wasser: Ikosaeder



- ▶ Euklid (um 300 v.Chr.): Konstruktion, Volumenberechnungen
- ▶ Johannes Kepler (Mysterium Cosmographicum, 1596): stellt Bahnradien der 6 bekannten Planeten durch eine bestimmte Abfolge der fünf Körper und ihrer Innen- und Außenkugeln dar.



Vorkommen

- Spielwürfel (Glücksspiele)



- ▶ Kunst



Abbildung: Atomium in Brüssel

► Natur

Tetraeder, Würfel, Oktaeder und Dodekaeder kommen in der Natur als (idealisierte) Kristalle vor (Kochsalz und Alaun bilden Würfelkristalle; reines Alaun kristallisiert als Oktaeder).



Abbildung: Alaun

Mineralien können mehrere kubische Formen annehmen (Pyrit kommt sowohl als Würfel, als auch als Oktaeder oder Dodekaeder vor).

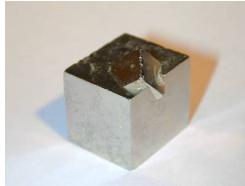


Abbildung: Pyrit



Das Ikosaeder ist eine Strukturform, wie sie bei Clustern beobachtet wird.

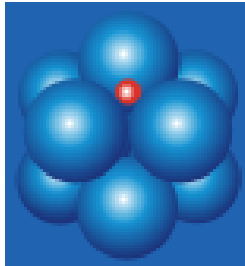


Abbildung: Cluster