Hyperbolische Geometrie

Markus Kern

15. Januar 2007

Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis

Geschichtliche Entwicklung

Geschichtliche Entwicklung

Die fünf Postulate von Euklid

Die fünf Postulate von Euklid

1. Es soll gefordert werden, dass sich von jedem Punkte nach jedem Punkte eine gerade Linie ziehen lasse.

Geschichtliche Entwicklung

Die fünf Postulate von Euklid

1. Es soll gefordert werden, dass sich von jedem Punkte nach jedem Punkte eine gerade Linie ziehen lasse.
2. Ferner, dass sich eine begrenzte Gerade stetig in gerader Linie verlängern lasse.

Geschichtliche Entwicklung

Die fünf Postulate von Euklid

1. Es soll gefordert werden, dass sich von jedem Punkte nach jedem Punkte eine gerade Linie ziehen lasse.
2. Ferner, dass sich eine begrenzte Gerade stetig in gerader Linie verlängern lasse.
3. Ferner, dass sich mit jedem Mittelpunkt und Halbmesser ein Kreis beschreiben lasse.

Geschichtliche Entwicklung

Die fünf Postulate von Euklid

1. Es soll gefordert werden, dass sich von jedem Punkte nach jedem Punkte eine gerade Linie ziehen lasse.
2. Ferner, dass sich eine begrenzte Gerade stetig in gerader Linie verlängern lasse.
3. Ferner, dass sich mit jedem Mittelpunkt und Halbmesser ein Kreis beschreiben lasse.
4. Ferner, dass alle rechten Winkel einander gleich seien.

Geschichtliche Entwicklung

Die fünf Postulate von Euklid

1. Es soll gefordert werden, dass sich von jedem Punkte nach jedem Punkte eine gerade Linie ziehen lasse.
2. Ferner, dass sich eine begrenzte Gerade stetig in gerader Linie verlängern lasse.
3. Ferner, dass sich mit jedem Mittelpunkt und Halbmesser ein Kreis beschreiben lasse.
4. Ferner, dass alle rechten Winkel einander gleich seien.
5. Endlich, wenn eine Gerade zwei Geraden trifft und mit ihnen auf derselben Seite innere Winkel bildet, die zusammen kleiner sind als zwei Rechte, so sollen die beiden Geraden, ins Unendliche verlängert, schließlich auf der Seite zusammentreffen, auf der die Winkel liegen, die zusammen kleiner sind als zwei Rechte.

- Grundlage: Axiomensystem von Euklid und Kolmogorov

- Grundlage: Axiomensystem von Euklid und Kolmogorov

Parallelenaxiom: Zu jeder Geraden g und zu jedem nicht auf g liegenden Punkt A gibt es höchstens eine Gerade, die durch A verläuft und zu g parallel ist.

- Grundlage: Axiomensystem von Euklid und Kolmogorov

Parallelenaxiom: Zu jeder Geraden g und zu jedem nicht auf g liegenden Punkt A gibt es höchstens eine Gerade, die durch A verläuft und zu g parallel ist.

- Beweisversuche z. B. von Saccheri, Lambert, Legendre und vielen anderen

- Grundlage: Axiomensystem von Euklid und Kolmogorov

Parallelenaxiom: Zu jeder Geraden g und zu jedem nicht auf g liegenden Punkt A gibt es höchstens eine Gerade, die durch A verläuft und zu g parallel ist.

- Beweisversuche z. B. von Saccheri, Lambert, Legendre und vielen anderen
- Scheitern direkter und indirekter Beweisversuche

- Grundlage: Axiomensystem von Euklid und Kolmogorov

Parallelenaxiom: Zu jeder Geraden g und zu jedem nicht auf g liegenden Punkt A gibt es höchstens eine Gerade, die durch A verläuft und zu g parallel ist.

- Beweisversuche z. B. von Saccheri, Lambert, Legendre und vielen anderen
- Scheitern direkter und indirekter Beweisversuche
- Erkenntnis von J. Bolyai, Gauß und Lobatschewski, dass eine Geometrie mit negiertem Parallelenaxiom vorstellbar ist

- Grundlage: Axiomensystem von Euklid und Kolmogorov

Parallelenaxiom: Zu jeder Geraden g und zu jedem nicht auf g liegenden Punkt A gibt es höchstens eine Gerade, die durch A verläuft und zu g parallel ist.

- Beweisversuche z. B. von Saccheri, Lambert, Legendre und vielen anderen
- Scheitern direkter und indirekter Beweisversuche
- Erkenntnis von J. Bolyai, Gauß und Lobatschewski, dass eine Geometrie mit negiertem Parallelenaxiom vorstellbar ist
- Lobatschewski veröffentlicht als erster Abhandlungen über eine solche Geometrie, so genannte Lobatschewski-Geometrie

Sätze der absoluten und der euklidischen Geometrie

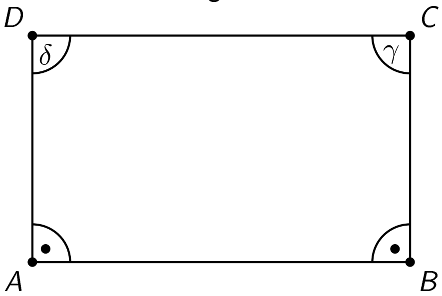
Sätze der absoluten und der euklidischen Geometrie

Warum scheiterten die vielen Beweisversuche der Mathematiker?

Warum scheiterten die vielen Beweisversuche der Mathematiker?
Grund: Im Beweis werden zum Parallelenaxiom äquivalente Aussagen verwendet oder Sätze die nur aufgrund des Parallelenaxioms gelten.

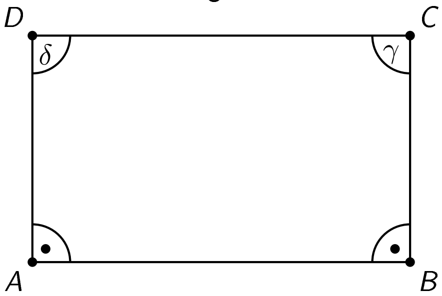
Sätze der absoluten und der euklidischen Geometrie

Warum scheiterten die vielen Beweisversuche der Mathematiker?
Grund: Im Beweis werden zum Parallelenaxiom äquivalente Aussagen verwendet oder Sätze die nur aufgrund des Parallelenaxioms gelten.
Betrachte Viereck $\overline{ABCD}$ mit den Eigenschaften:



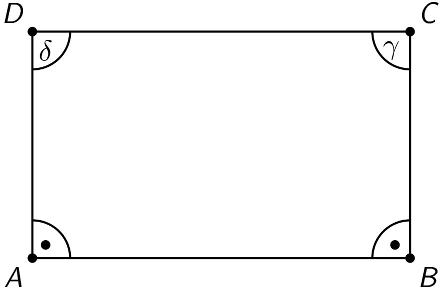
Sätze der absoluten und der euklidischen Geometrie

Warum scheiterten die vielen Beweisversuche der Mathematiker?
Grund: Im Beweis werden zum Parallelenaxiom äquivalente Aussagen verwendet oder Sätze die nur aufgrund des Parallelenaxioms gelten.
Betrachte Viereck $\overline{ABCD}$ mit den Eigenschaften:



1. Die Winkel bei A und B sind Rechte.

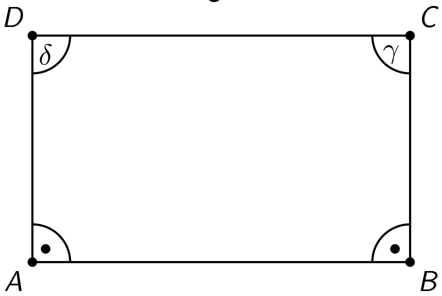
Warum scheiterten die vielen Beweisversuche der Mathematiker?
Grund: Im Beweis werden zum Parallelenaxiom äquivalente Aussagen verwendet oder Sätze die nur aufgrund des Parallelenaxioms gelten.
Betrachte Viereck $\overline{ABCD}$ mit den Eigenschaften:



1. Die Winkel bei A und B sind Rechte.
2. Die Strecken $\overline{AD}$ und $\overline{BC}$ sind kongruent.

Sätze der absoluten und der euklidischen Geometrie

Warum scheiterten die vielen Beweisversuche der Mathematiker?
Grund: Im Beweis werden zum Parallelenaxiom äquivalente Aussagen verwendet oder Sätze die nur aufgrund des Parallelenaxioms gelten.
Betrachte Viereck $\overline{ABCD}$ mit den Eigenschaften:



1. Die Winkel bei A und B sind Rechte.
2. Die Strecken $\overline{AD}$ und $\overline{BC}$ sind kongruent.

Ein solches Viereck wird Saccherisches Viereck genannt.

Saccheris Beweisweg

Saccheris Beweisweg

Die Winkel γ und δ sind kongruent.

Saccheris Beweisweg

Die Winkel γ und δ sind kongruent.

Nun betrachtete er drei unterschiedliche Hypothesen:

Saccheris Beweisweg

Die Winkel γ und δ sind kongruent.
Nun betrachtete er drei unterschiedliche Hypothesen:
1. Beide Winkel sind stumpfe Winkel

Saccheris Beweisweg

Die Winkel γ und δ sind kongruent.

Nun betrachtete er drei unterschiedliche Hypothesen:

1. Beide Winkel sind stumpfe Winkel
2. Beide Winkel sind rechte Winkel

Saccheris Beweisweg

Die Winkel γ und δ sind kongruent.

Nun betrachtete er drei unterschiedliche Hypothesen:

1. Beide Winkel sind stumpfe Winkel
2. Beide Winkel sind rechte Winkel
3. Beide Winkel sind spitze Winkel

Saccheris Beweisweg

Die Winkel γ und δ sind kongruent.

Nun betrachtete er drei unterschiedliche Hypothesen:

1. Beide Winkel sind stumpfe Winkel
2. Beide Winkel sind rechte Winkel
3. Beide Winkel sind spitze Winkel

Erste Hypothese widerspricht den Axiomen der absolute Geometrie.

Saccheris Beweisweg

Die Winkel γ und δ sind kongruent.

Nun betrachtete er drei unterschiedliche Hypothesen:

1. Beide Winkel sind stumpfe Winkel
2. Beide Winkel sind rechte Winkel
3. Beide Winkel sind spitze Winkel

Erste Hypothese widerspricht den Axiomen der absolute Geometrie.

Absolute Geometrie: Inzidenz-, Abstands-, Anordnungsaxiome und das Bewegungsaxiom

Saccheris Beweisweg

Die Winkel γ und δ sind kongruent.

Nun betrachtete er drei unterschiedliche Hypothesen:

1. Beide Winkel sind stumpfe Winkel
2. Beide Winkel sind rechte Winkel
3. Beide Winkel sind spitze Winkel

Erste Hypothese widerspricht den Axiomen der absolute Geometrie.

Absolute Geometrie: Inzidenz-, Abstands-, Anordnungsaxiome und das Bewegungsaxiom

Aus der zweiten Hypothese folgt das Parallelenaxiom.

Saccheris Beweisweg

Die Winkel γ und δ sind kongruent.

Nun betrachtete er drei unterschiedliche Hypothesen:

1. Beide Winkel sind stumpfe Winkel
2. Beide Winkel sind rechte Winkel
3. Beide Winkel sind spitze Winkel

Erste Hypothese widerspricht den Axiomen der absolute Geometrie.

Absolute Geometrie: Inzidenz-, Abstands-, Anordnungsaxiome und das Bewegungsaxiom

Aus der zweiten Hypothese folgt das Parallelenaxiom.

Die Existenz eines einzigen Saccherischen Vierecks mit vier rechten Winkeln reicht aus um das Parallelenaxiom herzuleiten.

Saccheris Beweisweg

Die Winkel γ und δ sind kongruent.

Nun betrachtete er drei unterschiedliche Hypothesen:

1. Beide Winkel sind stumpfe Winkel
2. Beide Winkel sind rechte Winkel
3. Beide Winkel sind spitze Winkel

Erste Hypothese widerspricht den Axiomen der absolute Geometrie.

Absolute Geometrie: Inzidenz-, Abstands-, Anordnungsaxiome und das Bewegungsaxiom

Aus der zweiten Hypothese folgt das Parallelenaxiom.

Die Existenz eines einzigen Saccherischen Vierecks mit vier rechten Winkeln reicht aus um das Parallelenaxiom herzuleiten.

Die Konstruktion eines solchen Vierecks scheiterte, da sie Sätze verlangt die nur aufgrund des Parallelenaxioms gelten.

Saccheris Beweisweg

Die Winkel γ und δ sind kongruent.
Nun betrachtete er drei unterschiedliche Hypothesen:

1. Beide Winkel sind stumpfe Winkel
2. Beide Winkel sind rechte Winkel
3. Beide Winkel sind spitze Winkel

Erste Hypothese widerspricht den Axiomen der absolute Geometrie.
Absolute Geometrie: Inzidenz-, Abstands-, Anordnungsaxiome und das Bewegungsaxiom
Aus der zweiten Hypothese folgt das Parallelenaxiom.
Die Existenz eines einzigen Saccherischen Vierecks mit vier rechten Winkeln reicht aus um das Parallelenaxiom herzuleiten.
Die Konstruktion eines solchen Vierecks scheiterte, da sie Sätze verlangt die nur aufgrund des Parallelenaxioms gelten.
Um nun ein Gefühl dafür zu entwickeln welche Sätze auf welchen Axiomen beruhen möchte ich hier einige vorstellen.

Sätze der absoluten Geometrie:

Sätze der absoluten Geometrie:

Definition 1 (Kongruenz): Zwei Punktmengen M_1 und M_2 heißen zueinander kongruent ($M_1 \equiv M_2$), falls eine Bewegung φ existiert, die M_1 auf M_2 abbildet.

Sätze der absoluten Geometrie:
Definition 1 (Kongruenz): Zwei Punktmengen M_1 und M_2 heißen zueinander kongruent ($M_1 \equiv M_2$), falls eine Bewegung φ existiert, die M_1 auf M_2 abbildet.
Definition 2 (Bewegung): Als **Bewegungen** werden Abbildungen der Ebene auf sich bezeichnet, die Abstände beliebiger Punktepaare unverändert lassen.

Sätze der absoluten Geometrie:

Definition 1 (Kongruenz): Zwei Punktmengen M_1 und M_2 heißen zueinander kongruent ($M_1 \equiv M_2$), falls eine Bewegung φ existiert, die M_1 auf M_2 abbildet.

Definition 2 (Bewegung): Als **Bewegungen** werden Abbildungen der Ebene auf sich bezeichnet, die Abstände beliebiger Punktepaare unverändert lassen.

Satz A.1 (Kongruenzsatz "sws"): Sind $\overline{ABC}$ und $\overline{DEF}$ zwei Dreiecke und ist $\overline{AB} \equiv \overline{DE}$, $\overline{AC} \equiv \overline{DF}$ sowie $\angle(BAC) \equiv \angle(EDF)$, so sind die beiden Dreiecke $\overline{ABC}$ und $\overline{DEF}$ kongruent zueinander.

Sätze der absoluten Geometrie:

Definition 1 (Kongruenz): Zwei Punktmengen M_1 und M_2 heißen zueinander kongruent ($M_1 \equiv M_2$), falls eine Bewegung φ existiert, die M_1 auf M_2 abbildet.

Definition 2 (Bewegung): Als **Bewegungen** werden Abbildungen der Ebene auf sich bezeichnet, die Abstände beliebiger Punktepaare unverändert lassen.

Satz A.1 (Kongruenzsatz "sws"): Sind $\overline{ABC}$ und $\overline{DEF}$ zwei Dreiecke und ist $\overline{AB} \equiv \overline{DE}$, $\overline{AC} \equiv \overline{DF}$ sowie $\angle(BAC) \equiv \angle(EDF)$, so sind die beiden Dreiecke $\overline{ABC}$ und $\overline{DEF}$ kongruent zueinander.

Satz A.2 (Kongruenzsatz "wsw"): Sind $\overline{ABC}$ und $\overline{DEF}$ zwei Dreiecke und ist $\overline{AB} \equiv \overline{DE}$, $\angle(BAC) \equiv \angle(EDF)$ sowie $\angle(ABC) \equiv \angle(DEF)$, so sind die beiden Dreiecke $\overline{ABC}$ und $\overline{DEF}$ kongruent.

Satz A.3 (Kongruenzsatz "sss"): Sind $\overline{ABC}$ und $\overline{DEF}$ Dreiecke mit $\overline{AB} \equiv \overline{DE}$, $\overline{AC} \equiv \overline{DF}$ und $\overline{BC} \equiv \overline{EF}$, so sind die Dreiecke $\overline{ABC}$ und $\overline{DEF}$ kongruent.

Satz A.3 (Kongruenzsatz "sss"): Sind $\overline{ABC}$ und $\overline{DEF}$ Dreiecke mit $\overline{AB} \equiv \overline{DE}$, $\overline{AC} \equiv \overline{DF}$ und $\overline{BC} \equiv \overline{EF}$, so sind die Dreiecke $\overline{ABC}$ und $\overline{DEF}$ kongruent.

Satz A.4 (Innenwinkelsatz der absoluten Geometrie): Die Innenwinkelsumme eines beliebigen Dreiecks ist stets kleiner oder gleich zwei Rechten.

Satz A.3 (Kongruenzsatz "sss"): Sind $\overline{ABC}$ und $\overline{DEF}$ Dreiecke mit $\overline{AB} \equiv \overline{DE}$, $\overline{AC} \equiv \overline{DF}$ und $\overline{BC} \equiv \overline{EF}$, so sind die Dreiecke $\overline{ABC}$ und $\overline{DEF}$ kongruent.

Satz A.4 (Innenwinkelsatz der absoluten Geometrie): Die Innenwinkelsumme eines beliebigen Dreiecks ist stets kleiner oder gleich zwei Rechten.

Satz A.5 (Existenz von Parallelen): Zu jeder Geraden g und zu jedem nicht auf g liegenden Punkt P gibt es mindestens eine Gerade h, die P enthält und zu g parallel ist.

Sätze die das Parallelenaxiom benötigen:

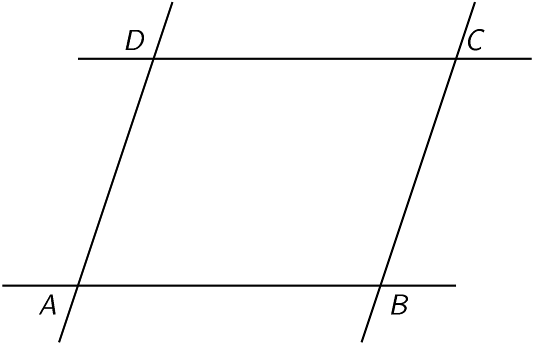
Sätze die das Parallelenaxiom benötigen:
Satz E.1 (Stufenwinkelsatz): Stufenwinkel an geschnittenen Parallelen sind kongruent.

Sätze die das Parallelenaxiom benötigen:
Satz E.1 (Stufenwinkelsatz): Stufenwinkel an geschnittenen Parallelen sind kongruent.
Satz E.2 (Wechselwinkelsatz): Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen sind kongruent.

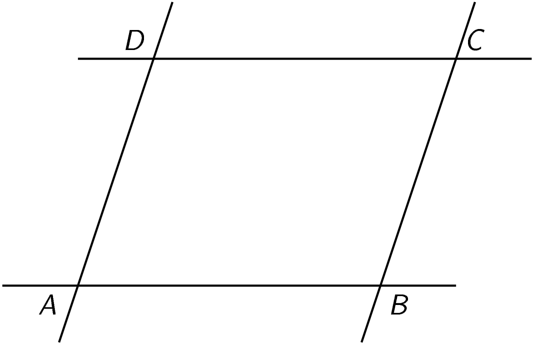
Sätze die das Parallelenaxiom benötigen:
Satz E.1 (Stufenwinkelsatz): Stufenwinkel an geschnittenen Parallelen sind kongruent.
Satz E.2 (Wechselwinkelsatz): Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen sind kongruent.
Satz E.3 (Der Innenwinkelsatz der euklidischen Geometrie): In jedem Dreieck ist die Summe der Innenwinkel gleich zwei Rechten.

Sätze die das Parallelenaxiom benötigen:
Satz E.1 (Stufenwinkelsatz): Stufenwinkel an geschnittenen Parallelen sind kongruent.
Satz E.2 (Wechselwinkelsatz): Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen sind kongruent.
Satz E.3 (Der Innenwinkelsatz der euklidischen Geometrie): In jedem Dreieck ist die Summe der Innenwinkel gleich zwei Rechten.
Satz E.4 ("starker" Außenwinkelsatz): Ein beliebiger Außenwinkel eines jeden Dreiecks ist so groß wie die Summe der beiden nicht anliegenden Innenwinkel dieses Dreiecks.

Satz E.5 (Parallelogrammregel): Sind A, B, C und D vier nichtkollineare Punkte und sind die Geraden $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ sowie und zueinander parallel, dann gilt $|AB| = |CD|$ sowie $|AD| = |BC|$.



Satz E.5 (Parallelogrammregel): Sind A, B, C und D vier nichtkollineare Punkte und sind die Geraden $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ sowie und zueinander parallel, dann gilt $|AB| = |CD|$ sowie $|AD| = |BC|$.



Satz E.6 (Abstandslinien sind Geraden): Ist g eine beliebige Gerade und a eine beliebige reelle Zahl, so ist die Menge aller Punkte, die von g den Abstand a haben und in einer Halbebene bezüglich g liegen, eine zu g parallele Gerade (für $a \neq 0$) bzw. die Gerade g selbst (für $a = 0$).

Äquivalente Aussagen zum Parallelenaxiom

Äquivalente Aussagen zum Parallelenaxiom

Saccheris Bemühungen scheiterten an der Konstruktion eines Rechteckes.

Äquivalente Aussagen zum Parallelenaxiom

Saccheris Bemühungen scheiterten an der Konstruktion eines Rechteckes.
Grund: Die Existenz von Rechtecken setzt das Parallelenaxiom voraus.

Äquivalente Aussagen zum Parallelenaxiom

Saccheris Bemühungen scheiterten an der Konstruktion eines Rechteckes.
Grund: Die Existenz von Rechtecken setzt das Parallelenaxiom voraus.
Bekannt: Aus der Hypothese des rechten Winkels folgt das Parallelenaxiom.

Äquivalente Aussagen zum Parallelenaxiom

Saccheris Bemühungen scheiterten an der Konstruktion eines Rechteckes.
Grund: Die Existenz von Rechtecken setzt das Parallelenaxiom voraus.
Bekannt: Aus der Hypothese des rechten Winkels folgt das Parallelenaxiom.
Ziel: Minimales Axiomensystem.

Äquivalente Aussagen zum Parallelenaxiom

Saccheris Bemühungen scheiterten an der Konstruktion eines Rechteckes.
Grund: Die Existenz von Rechtecken setzt das Parallelenaxiom voraus.
Bekannt: Aus der Hypothese des rechten Winkels folgt das Parallelenaxiom.
Ziel: Minimales Axiomensystem.
Auf der Grundlage der Axiome und Sätze der absoluten Geometrie sind folgende Aussagen äquivalent:

Äquivalente Aussagen zum Parallelenaxiom

Saccheris Bemühungen scheiterten an der Konstruktion eines Rechteckes.
Grund: Die Existenz von Rechtecken setzt das Parallelenaxiom voraus.
Bekannt: Aus der Hypothese des rechten Winkels folgt das Parallelenaxiom.
Ziel: Minimales Axiomensystem.
Auf der Grundlage der Axiome und Sätze der absoluten Geometrie sind folgende Aussagen äquivalent:

1. Zu jeder Geraden g und zu jedem nicht auf g liegenden Punkt A gibt es höchstens eine Gerade, die durch A verläuft und zu g parallel ist (euklidisches Parallelenaxiom).

Äquivalente Aussagen zum Parallelenaxiom

Saccheris Bemühungen scheiterten an der Konstruktion eines Rechteckes.
Grund: Die Existenz von Rechtecken setzt das Parallelenaxiom voraus.
Bekannt: Aus der Hypothese des rechten Winkels folgt das Parallelenaxiom.
Ziel: Minimales Axiomensystem.
Auf der Grundlage der Axiome und Sätze der absoluten Geometrie sind folgende Aussagen äquivalent:

1. Zu jeder Geraden g und zu jedem nicht auf g liegenden Punkt A gibt es höchstens eine Gerade, die durch A verläuft und zu g parallel ist (euklidisches Parallelenaxiom).
2. Es gilt der Stufenwinkelsatz bzw. der Wechselwinkelsatz.

Äquivalente Aussagen zum Parallelenaxiom

Saccheris Bemühungen scheiterten an der Konstruktion eines Rechteckes.
Grund: Die Existenz von Rechtecken setzt das Parallelenaxiom voraus.
Bekannt: Aus der Hypothese des rechten Winkels folgt das Parallelenaxiom.
Ziel: Minimales Axiomensystem.
Auf der Grundlage der Axiome und Sätze der absoluten Geometrie sind folgende Aussagen äquivalent:

1. Zu jeder Geraden g und zu jedem nicht auf g liegenden Punkt A gibt es höchstens eine Gerade, die durch A verläuft und zu g parallel ist (euklidisches Parallelenaxiom).
2. Es gilt der Stufenwinkelsatz bzw. der Wechselwinkelsatz.
3. In jedem Dreieck beträgt die Innenwinkelsumme 180°.

Äquivalente Aussagen zum Parallelenaxiom

Saccheris Bemühungen scheiterten an der Konstruktion eines Rechteckes.
Grund: Die Existenz von Rechtecken setzt das Parallelenaxiom voraus.
Bekannt: Aus der Hypothese des rechten Winkels folgt das Parallelenaxiom.
Ziel: Minimales Axiomensystem.
Auf der Grundlage der Axiome und Sätze der absoluten Geometrie sind folgende Aussagen äquivalent:

1. Zu jeder Geraden g und zu jedem nicht auf g liegenden Punkt A gibt es höchstens eine Gerade, die durch A verläuft und zu g parallel ist (euklidisches Parallelenaxiom).
2. Es gilt der Stufenwinkelsatz bzw. der Wechselwinkelsatz.
3. In jedem Dreieck beträgt die Innenwinkelsumme 180°.
4. In (mindestens) einem Saccherischen Viereck gilt die Hypothese vom rechten Winkel.

Äquivalente Aussagen zum Parallelenaxiom

Saccheris Bemühungen scheiterten an der Konstruktion eines Rechteckes.
Grund: Die Existenz von Rechtecken setzt das Parallelenaxiom voraus.
Bekannt: Aus der Hypothese des rechten Winkels folgt das Parallelenaxiom.
Ziel: Minimales Axiomensystem.
Auf der Grundlage der Axiome und Sätze der absoluten Geometrie sind folgende Aussagen äquivalent:

1. Zu jeder Geraden g und zu jedem nicht auf g liegenden Punkt A gibt es höchstens eine Gerade, die durch A verläuft und zu g parallel ist (euklidisches Parallelenaxiom).
2. Es gilt der Stufenwinkelsatz bzw. der Wechselwinkelsatz.
3. In jedem Dreieck beträgt die Innenwinkelsumme 180°.
4. In (mindestens) einem Saccherischen Viereck gilt die Hypothese vom rechten Winkel.
5. Abstandslinien sind Geraden.

Das Axiomensystem der Hyperbolischen Geometrie

Das Axiomensystem der Hyperbolischen Geometrie

I. Inzidenzaxiome
II. Abstandsaxiome
III. Anordnungsaxiome
IV. Bewegungsaxiom

Das Axiomensystem der Hyperbolischen Geometrie

I. Inzidenzaxiome
II. Abstandsaxiome
III. Anordnungsaxiome
IV. Bewegungsaxiom

V.a Lobatschewskisches Parallelenaxiom:
Es existiert eine Gerade g und ein nicht auf g liegenden Punkt P, durch den mindestens zwei Geraden verlaufen, die zu g parallel sind.

Das Axiomensystem der Hyperbolischen Geometrie

I. Inzidenzaxiome
II. Abstandsaxiome
III. Anordnungsaxiome
IV. Bewegungsaxiom

V.a Lobatschewskisches Parallelenaxiom:
Es existiert eine Gerade g und ein nicht auf g liegenden Punkt P, durch den mindestens zwei Geraden verlaufen, die zu g parallel sind.

Mittels der Axiome der absoluten Geometrie folgt:

Das Axiomensystem der Hyperbolischen Geometrie

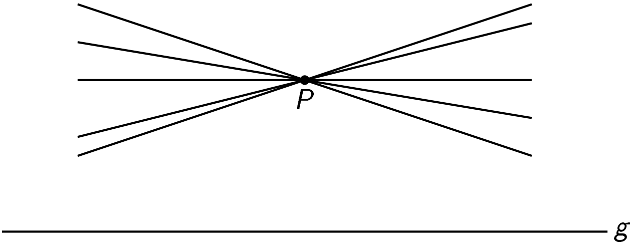
I. Inzidenzaxiome
II. Abstandsaxiome
III. Anordnungsaxiome
IV. Bewegungsaxiom

V.a Lobatschewskisches Parallelenaxiom:
Es existiert eine Gerade g und ein nicht auf g liegenden Punkt P, durch den mindestens zwei Geraden verlaufen, die zu g parallel sind.

Mittels der Axiome der absoluten Geometrie folgt:
V.b Lobatschewskisches Parallelenaxiom (verallgemeinerte Fassung): Es existieren zu jeder Geraden g und zu jedem nicht auf g liegenden Punkt P mindestens zwei Geraden, die durch P verlaufen und zu g parallel sind.

Satz 1: Zu jeder Geraden g und zu jedem nicht auf g liegenden Punkt P existieren unendlich viele Geraden, die durch P verlaufen und g nicht schneiden.

Satz 1: Zu jeder Geraden g und zu jedem nicht auf g liegenden Punkt P existieren unendlich viele Geraden, die durch P verlaufen und g nicht schneiden.



Satz 2 (Innenwinkelsatz der hyperbolischen Geometrie): In jedem Dreieck ist die Summe der Innenwinkel kleiner als zwei Rechte.

Satz 2 (Innenwinkelsatz der hyperbolischen Geometrie): In jedem Dreieck ist die Summe der Innenwinkel kleiner als zwei Rechte.

Satz 3: Die Winkelsumme eines jeden Vierecks ist kleiner als 360°.

Satz 2 (Innenwinkelsatz der hyperbolischen Geometrie): In jedem Dreieck ist die Summe der Innenwinkel kleiner als zwei Rechte.

Satz 3: Die Winkelsumme eines jeden Vierecks ist kleiner als 360°.

Satz 4: In der hyperbolischen Geometrie gilt in jedem Saccheri-Viereck die Hypothese vom spitzen Winkel.

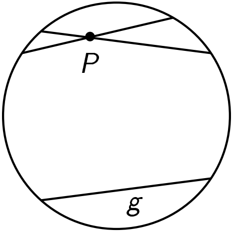
Satz 2 (Innenwinkelsatz der hyperbolischen Geometrie): In jedem Dreieck ist die Summe der Innenwinkel kleiner als zwei Rechte.

Satz 3: Die Winkelsumme eines jeden Vierecks ist kleiner als $360°$.

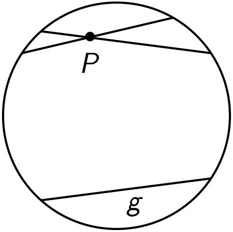
Satz 4: In der hyperbolischen Geometrie gilt in jedem Saccheri-Viereck die Hypothese vom spitzen Winkel.

Satz 5: In der hyperbolischen Geometrie existieren keine Rechtecke.

Das Cayley-Klein Modell

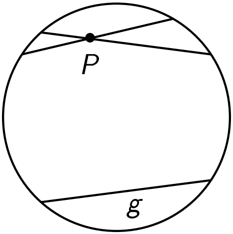


Das Cayley-Klein Modell



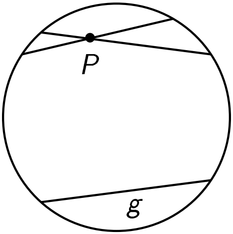
Nachteile des Modells:

Das Cayley-Klein Modell



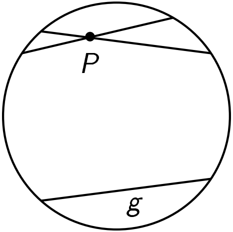
Nachteile des Modells:
Abstands- und Winkelmessung nicht wie in der euklidischen Ebene möglich.

Das Cayley-Klein Modell



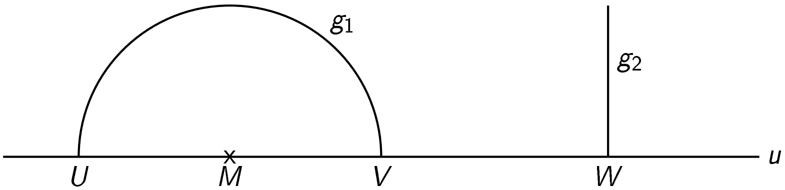
Nachteile des Modells:
Abstands- und Winkelmessung nicht wie in der euklidischen Ebene möglich. Die Abstandsfunktion im Modell ist radialsymmetrisch zum Mittelpunkt des Kreises und Punkte des Kreisrandes haben einen unendlich weiten Abstand.

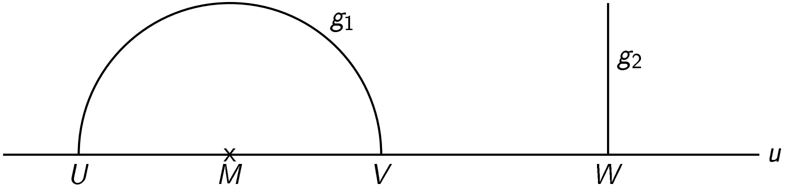
Das Cayley-Klein Modell



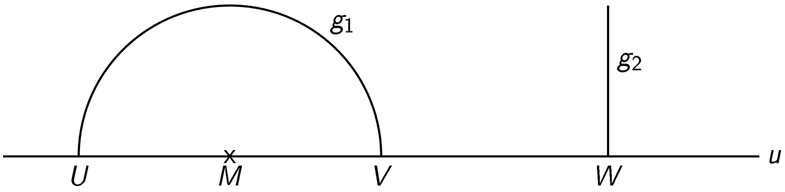
Nachteile des Modells:
Abstands- und Winkelmessung nicht wie in der euklidischen Ebene möglich. Die Abstandsfunktion im Modell ist radialsymmetrisch zum Mittelpunkt des Kreises und Punkte des Kreisrandes haben einen unendlich weiten Abstand. Durch diesen Abstandsbegriff wird nicht nur die Abstandsmessung geändert sondern auch die Winkelmessung.

Das Poincaré Modell



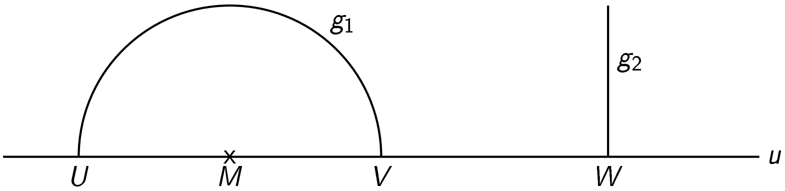


Definition 1: Es sei eine beliebige euklidische Ebene ϵ und in dieser Ebene eine Gerade u gegeben



Definition 1: Es sei eine beliebige euklidische Ebene ϵ und in dieser Ebene eine Gerade u gegeben
a) Nichteuklidische Ebene H ist eine der beiden offenen Halbebenen von ϵ bezüglich u.

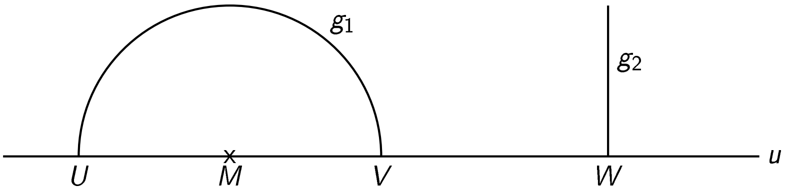
Das Poincaré Modell



Definition 1: Es sei eine beliebige euklidische Ebene ϵ und in dieser Ebene eine Gerade u gegeben

a) Nichteuklidische Ebene H ist eine der beiden offenen Halbebenen von ϵ bezüglich u.

b) Nichteuklidische Punkte sind alle euklidischen Punkte der offenen Halbebene.



Definition 1: Es sei eine beliebige euklidische Ebene ϵ und in dieser Ebene eine Gerade u gegeben

a) Nichteuklidische Ebene H ist eine der beiden offenen Halbebenen von ϵ bezüglich u.

b) Nichteuklidische Punkte sind alle euklidischen Punkte der offenen Halbebene.

c) Nichteuklidische Geraden sind alle vollständig in H liegenden offenen Halbkreise, deren Mittelpunkte der (euklidischen) Geraden u angehören, und alle in H liegenden offenen Halbgeraden, deren Anfangspunkte u angehören.

I. Inzidenzaxiome

I. Inzidenzaxiome

I/1 Jede Gerade ist eine Punktmenge.

I. Inzidenzaxiome

I/1 Jede Gerade ist eine Punktmenge.

I/2 Zu zwei beliebigen, voneinander verschiedenen Punkten gibt es genau eine Gerade, welche diese beiden Punkte enthält.

I. Inzidenzaxiome

I/1 Jede Gerade ist eine Punktmenge.

I/2 Zu zwei beliebigen, voneinander verschiedenen Punkten gibt es genau eine Gerade, welche diese beiden Punkte enthält.

I/3 Jede Gerade enthält mindestens einen Punkt.

I. Inzidenzaxiome

I/1 Jede Gerade ist eine Punktmenge.

I/2 Zu zwei beliebigen, voneinander verschiedenen Punkten gibt es genau eine Gerade, welche diese beiden Punkte enthält.

I/3 Jede Gerade enthält mindestens einen Punkt.

I/4 Es existieren (mindestens) drei Punkte, die nicht einer Geraden angehören.

I. Inzidenzaxiome

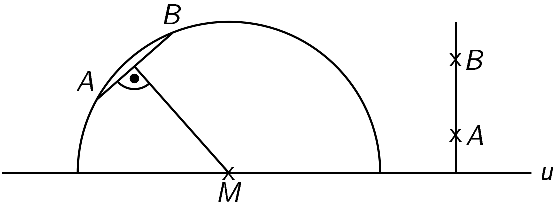
I/1 Jede Gerade ist eine Punktmenge.

I/2 Zu zwei beliebigen, voneinander verschiedenen Punkten gibt es genau eine Gerade, welche diese beiden Punkte enthält.

I/3 Jede Gerade enthält mindestens einen Punkt.

I/4 Es existieren (mindestens) drei Punkte, die nicht einer Geraden angehören.

Die Gültigkeit von I/1, I/3 und I/4 ist unmittelbar einzusehen, wohingegen I/2 näherer Betrachtung bedarf.



II. Abstandsaxiome

II. Abstandsaxiome

II/1 Zu zwei beliebigen Punkten A und B gibt es eine nichtnegative reelle Zahl d mit $d = 0 \Leftrightarrow A = B$. (Diese Zahl wird als Abstand $|AB|_N$ der Punkte A und B bezeichnet.)

II. Abstandsaxiome

II/1 Zu zwei beliebigen Punkten A und B gibt es eine nichtnegative reelle Zahl d mit $d = 0 \Leftrightarrow A = B$. (Diese Zahl wird als Abstand $|AB|_N$ der Punkte A und B bezeichnet.)

II/2 Für zwei beliebige Punkte A und B gilt $|AB|_N = |BA|_N$.

II. Abstandsaxiome

II/1 Zu zwei beliebigen Punkten A und B gibt es eine nichtnegative reelle Zahl d mit $d = 0 \Leftrightarrow A = B$. (Diese Zahl wird als Abstand $|AB|_N$ der Punkte A und B bezeichnet.)

II/2 Für zwei beliebige Punkte A und B gilt $|AB|_N = |BA|_N$.

II/3 Für drei beliebige Punkte A, B und C gilt

$|AB|_N + |BC|_N \geq |AC|_N$.

Falls A, B und C auf einer Geraden liegen, so gilt eine der drei Gleichungen

$|AB|_N + |BC|_N = |AC|_N$,

$|AC|_N + |CB|_N = |AB|_N$,

$|BA|_N + |AC|_N = |BC|_N$,

ist umgekehrt eine dieser drei Gleichungen erfüllt, so liegen A, B und C auf einer Geraden.

Definition 2: Es seien A, B, U und V vier Punkte einer Geraden g, und es sei auf g eine Richtung ausgezeichnet. Als **Doppelverhältnis der Punkte** A, B, U und V bezeichnen wir den Quotienten:

$$(A, B, U, V) := \frac{|AU||BV|}{|BU||AV|} = \frac{|AU|}{|BU|} : \frac{|AV|}{|BV|}.$$

Definition 2: Es seien A, B, U und V vier Punkte einer Geraden g, und es sei auf g eine Richtung ausgezeichnet. Als **Doppelverhältnis der Punkte** A, B, U und V bezeichnen wir den Quotienten:

$$(A, B, U, V) := \frac{|AU||BV|}{|BU||AV|} = \frac{|AU|}{|BU|} : \frac{|AV|}{|BV|}.$$

Eigenschaften des Doppelverhältnisses:

Definition 2: Es seien A, B, U und V vier Punkte einer Geraden g, und es sei auf g eine Richtung ausgezeichnet. Als **Doppelverhältnis der Punkte** A, B, U und V bezeichnen wir den Quotienten:

$$(A, B, U, V) := \frac{|AU||BV|}{|BU||AV|} = \frac{|AU|}{|BU|} : \frac{|AV|}{|BV|}.$$

Eigenschaften des Doppelverhältnisses:

1. Falls vier Punkte A, B, U und V paarweise voneinander verschieden sind und jeder der Punkte A und B zwischen den Punkten U und V liegt, so gilt $(A, B, U, V) > 0$.

Definition 2: Es seien A, B, U und V vier Punkte einer Geraden g, und es sei auf g eine Richtung ausgezeichnet. Als **Doppelverhältnis der Punkte** A, B, U und V bezeichnen wir den Quotienten:

$$(A, B, U, V) := \frac{|AU||BV|}{|BU||AV|} = \frac{|AU|}{|BU|} : \frac{|AV|}{|BV|}.$$

Eigenschaften des Doppelverhältnisses:

1. Falls vier Punkte A, B, U und V paarweise voneinander verschieden sind und jeder der Punkte A und B zwischen den Punkten U und V liegt, so gilt $(A, B, U, V) > 0$.
2. Für vier beliebige (kollineare) Punkte A, B, U und V gilt: $(A, B, U, V) = \frac{1}{(B,A,U,V)}$.

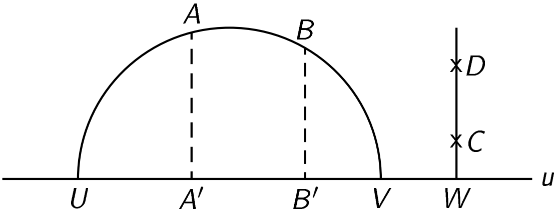
Definition 2: Es seien A, B, U und V vier Punkte einer Geraden g, und es sei auf g eine Richtung ausgezeichnet. Als **Doppelverhältnis der Punkte** A, B, U und V bezeichnen wir den Quotienten:

$$(A, B, U, V) := \frac{|AU||BV|}{|BU||AV|} = \frac{|AU|}{|BU|} : \frac{|AV|}{|BV|}.$$

Eigenschaften des Doppelverhältnisses:

1. Falls vier Punkte A, B, U und V paarweise voneinander verschieden sind und jeder der Punkte A und B zwischen den Punkten U und V liegt, so gilt $(A, B, U, V) > 0$.
2. Für vier beliebige (kollineare) Punkte A, B, U und V gilt: $(A, B, U, V) = \frac{1}{(B,A,U,V)}$.
3. Für fünf beliebige (kollineare) Punkte A, B, C, U und V gilt $(A, C, U, V) = (A, B, U, V) \cdot (B, C, U, V)$.

Definition 3: Es seien A und B zwei N-Punkte, die auf einer N-Geraden vom Typ 1 mit den uneigentlichen Punkten U und V liegen sowie A' und B' die Fußpunkte der Lote von A bzw. B auf u. Weiterhin seien C und D zwei Punkte, die auf einer N-Geraden vom Typ 2 mit dem uneigentlichen Punkt $W \in u$ liegen.
Als nichteuklidischen (N-)Abstand der Punkte A und B sowie der Punkte C und D bezeichnen wir
$|AB|_N := \frac{1}{2}|ln((A', B', U, V))|$
bzw.
$|CD|_N := \left|ln\left(\frac{|DW|}{|CW|}\right)\right|$



Folgerung: Falls ein kartesisches Koordinatensystem gegeben ist, dessen x-Achse auf der Randgeraden u der nichteuklidischen Ebene H liegt und A, B, C, D, U und V Punkte wie in Def. 2 beschrieben sowie (x_A, y_A), (x_B, y_B), (x_C, y_C), (x_D, y_D), $(x_U, 0)$ und $(x_V, 0)$ die Koordinaten dieser Punkte sind, so gilt
$|AB|_N := \frac{1}{2}\left| ln\left(\frac{(x_U - x_A)(x_V - x_B)}{(x_U - x_B)(x_V - x_A)}\right)\right|$ sowie $|CD|_N := \left| ln\left(\frac{|y_D|}{|y_C|}\right)\right|$.

Folgerung: Falls ein kartesisches Koordinatensystem gegeben ist, dessen x-Achse auf der Randgeraden u der nichteuklidischen Ebene H liegt und A, B, C, D, U und V Punkte wie in Def. 2 beschrieben sowie (x_A, y_A), (x_B, y_B), (x_C, y_C), (x_D, y_D), $(x_U, 0)$ und $(x_V, 0)$ die Koordinaten dieser Punkte sind, so gilt
$|AB|_N := \frac{1}{2}\left|ln\left(\frac{(x_U - x_A)(x_V - x_B)}{(x_U - x_B)(x_V - x_A)}\right)\right|$ sowie $|CD|_N := \left|ln\left(\frac{|y_D|}{|y_C|}\right)\right|$.

Nachweis von II/1:
"$\Leftarrow$" Aus $A = B$ bzw. $C = D$ folgt $d = 0$:
Die Punkte A und B bzw. C und D seien identisch dann folgt aus der Definition des Doppelverhältnisses, dass $(A', B', U, V) = 1$ bzw. $\frac{|CW|}{|DW|} = 1$.
Aus $ln(1) = 0$ folgt: $|AB|_N = 0$ sowie $|CD|_N = 0$.

Folgerung: Falls ein kartesisches Koordinatensystem gegeben ist, dessen x-Achse auf der Randgeraden u der nichteuklidischen Ebene H liegt und A, B, C, D, U und V Punkte wie in Def. 2 beschrieben sowie (x_A, y_A), (x_B, y_B), (x_C, y_C), (x_D, y_D), $(x_U, 0)$ und $(x_V, 0)$ die Koordinaten dieser Punkte sind, so gilt
$|AB|_N := \frac{1}{2}\left|ln\left(\frac{(x_U-x_A)(x_V-x_B)}{(x_U-x_B)(x_V-x_A)}\right)\right|$ sowie $|CD|_N := \left|ln\left(\frac{|y_D|}{|y_C|}\right)\right|$.

Nachweis von II/1:
"$\Leftarrow$" Aus $A = B$ bzw. $C = D$ folgt $d = 0$:
Die Punkte A und B bzw. C und D seien identisch dann folgt aus der Definition des Doppelverhältnisses, dass $(A', B', U, V) = 1$ bzw. $\frac{|CW|}{|DW|} = 1$.
Aus $ln(1) = 0$ folgt: $|AB|_N = 0$ sowie $|CD|_N = 0$.

"$\Rightarrow$" Aus $d = 0$ folgt $A = B$ bzw. $C = D$.
Sei $|AB|_N = 0$ bzw. $|CD|_N = 0$, so muss $(A', B', U, V) = 1$ bzw. $\frac{|CW|}{|DW|} = 1$ sein, woraus die Identität von A und B bzw. C und D folgt.

Nachweis von II/2:

Für zwei beliebige Punkte A und B gilt $|AB|_N = |BA|_N$.

Nachweis von II/2:

Für zwei beliebige Punkte A und B gilt $|AB|_N = |BA|_N$.

N-Gerade Typ 1:

$$|BA|_N = \frac{|ln((B',A',U,V))|}{2} = \frac{|ln\frac{1}{(A',B',U,V)}|}{2} = \frac{|-ln((A',B',U,V))|}{2} = |AB|_N$$

Nachweis von II/2:
Für zwei beliebige Punkte A und B gilt $|AB|_N = |BA|_N$.
N-Gerade Typ 1:

$$|BA|_N = \frac{|ln((B',A',U,V))|}{2} = \frac{|ln\frac{1}{(A',B',U,V)}|}{2} = \frac{|-ln((A',B',U,V))|}{2} = |AB|_N$$

N-Gerade Typ 2: $|DC|_N = \left|ln\left(\frac{|CW|}{|DW|}\right)\right| = \left|-ln\left(\frac{|DW|}{|CW|}\right)\right| = |CD|_N$

Nachweis von II/2:

Für zwei beliebige Punkte A und B gilt $|AB|_N = |BA|_N$.

N-Gerade Typ 1:

$$|BA|_N = \frac{|ln((B',A',U,V))|}{2} = \frac{|ln\frac{1}{(A',B',U,V)}|}{2} = \frac{|-ln((A',B',U,V))|}{2} = |AB|_N$$

N-Gerade Typ 2: $|DC|_N = \left|ln\left(\frac{|CW|}{|DW|}\right)\right| = \left|-ln\left(\frac{|DW|}{|CW|}\right)\right| = |CD|_N$

Nachweis von II/3:

Behauptung: Für drei kollineare Punkte A, B, C, wobei der Punkt B zwischen A und C liegen soll, gilt die Gleichung $|AB|_N + |BC|_N = |AC|_N$.

Nachweis von II/2:

Für zwei beliebige Punkte A und B gilt $|AB|_N = |BA|_N$.

N-Gerade Typ 1:

$|BA|_N = \frac{|ln((B',A',U,V))|}{2} = \frac{|ln\frac{1}{(A',B',U,V)}|}{2} = \frac{|-ln((A',B',U,V))|}{2} = |AB|_N$

N-Gerade Typ 2: $|DC|_N = \left|ln\left(\frac{|CW|}{|DW|}\right)\right| = \left|-ln\left(\frac{|DW|}{|CW|}\right)\right| = |CD|_N$

Nachweis von II/3:

Behauptung: Für drei kollineare Punkte A, B, C, wobei der Punkt B zwischen A und C liegen soll, gilt die Gleichung $|AB|_N + |BC|_N = |AC|_N$.

1. Fall: Die Punkte A, B und C liegen auf einer N-Geraden vom Typ 1 (mit den uneigentlichen Punkten U und V). Aus der Lage der drei Punkte folgt, dass der Lotfußpunkt B' von B zwischen A' und C' liegen muss.

$|AB|_N + |BC|_N = \frac{1}{2}|ln((A', B', U, V))| + \frac{1}{2}|ln((B', C', U, V))|$

$= \frac{1}{2}\left(|ln(A', B', U, V)| + ln(B', C', U, V)\right)$

$= \frac{1}{2}\left(|ln\left[(A', B', U, V)\cdot(B', C', U, V)\right]|\right)$

$= \frac{1}{2}|ln((A', C', U, V))| = |AC|_N$

2. Fall: Die Punkte A, B und C liegen auf einer N-Geraden vom Typ 2 (mit dem uneigentlichen Punkten W).
$|AB|_N + |BC|_N = |ln(\frac{|BW|}{|AW|})| + |ln(\frac{|CW|}{|BW|})| = |ln(\frac{|BW|}{|AW|} \cdot \frac{|CW|}{|BW|})| =$
$|ln(\frac{|CW|}{|AW|})| = |AC|_N$

III. Anordnungsaxiome

III. Anordnungsaxiome

III/1 Zu jeder nichtnegativen reellen Zahl a und jedem Punkt O der Ebene existiert auf jedem Strahl mit dem Anfangspunkt O genau ein Punkt A mit $|OA|_N = a$.

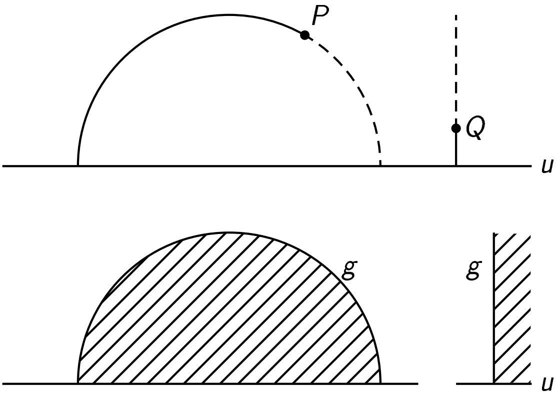
III. Anordnungsaxiome

III/1 Zu jeder nichtnegativen reellen Zahl a und jedem Punkt O der Ebene existiert auf jedem Strahl mit dem Anfangspunkt O genau ein Punkt A mit $|OA|_N = a$.

III/2 Eine beliebige Gerade g teilt die Menge der ihr nicht angehörenden Punkte der Ebene in zwei nichtleere, disjunkte Mengen derart, dass

a) die Verbindungsstrecke zweier beliebiger Punkte, die verschiedenen Mengen angehören, die Gerade g schneidet und

b) die Verbindungsstrecke zweier beliebiger Punkte, die derselben Menge angehören, die Gerade g nicht schneidet.



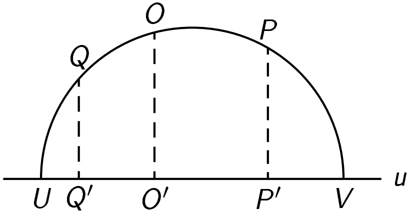
P
Q
u
g
g
u

Nachweis von III/1:

Zu zeigen: Es existieren genau zwei Punkte P und Q, die von O den Abstand a haben und dass P und Q auf verschiedenen Halbgeraden von g bezüglich O liegen.

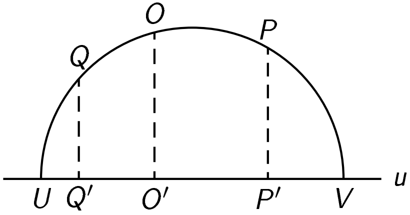
Nachweis von III/1:

Zu zeigen: Es existieren genau zwei Punkte P und Q, die von O den Abstand a haben und dass P und Q auf verschiedenen Halbgeraden von g bezüglich O liegen.



Nachweis von III/1:

Zu zeigen: Es existieren genau zwei Punkte P und Q, die von O den Abstand a haben und dass P und Q auf verschiedenen Halbgeraden von g bezüglich O liegen.



Beweis: $(O', Q', U, V) := \frac{|O'U||Q'V|}{|Q'U||O'V|}$

Falls der Punkt Q' links von O' liegt gilt: $|OQ|_N = \frac{1}{2} ln \left(\frac{|O'U||Q'V|}{|Q'U||O'V|} \right)$

Aus der Bedingung $|OQ|_N = a$ ergibt sich $\frac{|O'U||Q'V|}{|Q'U||O'V|} = exp(2a)$

Analog ergibt sich für den Punkt P' der rechts von O' liegt:

$\frac{|O'U||P'V|}{|P'U||O'V|} = exp(-2a)$

Ist O ein Punkt auf einer N-Geraden vom Typ 2 mit dem uneigentlichen Punkt W, so ist $ln\left(\frac{|QW|}{|OW|}\right)$ für alle Punkte Q “oberhalb” von O positiv und $ln\left(\frac{|PW|}{|OW|}\right)$ für alle Punkte “unterhalb” von O negativ.

Ist O ein Punkt auf einer N-Geraden vom Typ 2 mit dem uneigentlichen Punkt W, so ist $ln\left(\frac{|QW|}{|OW|}\right)$ für alle Punkte Q "oberhalb" von O positiv und $ln\left(\frac{|PW|}{|OW|}\right)$ für alle Punkte "unterhalb" von O negativ.

Es existieren also genau zwei Punkte P und Q, die von O den nichteuklidischen Abstand a haben.

Ist O ein Punkt auf einer N-Geraden vom Typ 2 mit dem uneigentlichen Punkt W, so ist $ln\left(\frac{|QW|}{|OW|}\right)$ für alle Punkte Q "oberhalb" von O positiv und $ln\left(\frac{|PW|}{|OW|}\right)$ für alle Punkte "unterhalb" von O negativ.

Es existieren also genau zwei Punkte P und Q, die von O den nichteuklidischen Abstand a haben.

Diese Punkte werden durch $ln\left(\frac{|QW|}{|OW|}\right) = e^a$ und $ln\left(\frac{|PW|}{|OW|}\right) = e^{-a}$ festgelegt.

Ist O ein Punkt auf einer N-Geraden vom Typ 2 mit dem uneigentlichen Punkt W, so ist $ln\left(\frac{|QW|}{|OW|}\right)$ für alle Punkte Q "oberhalb" von O positiv und $ln\left(\frac{|PW|}{|OW|}\right)$ für alle Punkte "unterhalb" von O negativ.

Es existieren also genau zwei Punkte P und Q, die von O den nichteuklidischen Abstand a haben.

Diese Punkte werden durch $ln\left(\frac{|QW|}{|OW|}\right) = e^a$ und $ln\left(\frac{|PW|}{|OW|}\right) = e^{-a}$ festgelegt.

Dass sich P und Q auf unterschiedlichen Halbgeraden bzgl. O befinden, liegt auf der Hand.

IV. Bewegungsaxiom

IV. Bewegungsaxiom

Wenn der Abstand zweier Punkte A und B positiv und gleich dem Abstand zweier Punkte C und D ist, dann gibt es genau zwei Bewegungen, die A auf C und B auf D abbilden. Eine Halbebene bezüglich der Geraden AB wird bei jeder dieser beiden Bewegungen auf eine andere Halbebene bezüglich CD abgebildet.

IV. Bewegungsaxiom

Wenn der Abstand zweier Punkte A und B positiv und gleich dem Abstand zweier Punkte C und D ist, dann gibt es genau zwei Bewegungen, die A auf C und B auf D abbilden. Eine Halbebene bezüglich der Geraden AB wird bei jeder dieser beiden Bewegungen auf eine andere Halbebene bezüglich CD abgebildet.

Satz P.1: Euklidische Verschiebungen entlang der Randgeraden u, **Spiegelungen** an zu u orthogonalen Geraden und **zentrische Streckungen** mit einem positiven Streckungsfaktor und einem Streckungszentrum auf u bilden die nichteuklidische Ebene H auf sich ab und lassen nichteuklidische Abstände unverändert.

IV. Bewegungsaxiom

Wenn der Abstand zweier Punkte A und B positiv und gleich dem Abstand zweier Punkte C und D ist, dann gibt es genau zwei Bewegungen, die A auf C und B auf D abbilden. Eine Halbebene bezüglich der Geraden AB wird bei jeder dieser beiden Bewegungen auf eine andere Halbebene bezüglich CD abgebildet.

Satz P.1: Euklidische Verschiebungen entlang der Randgeraden u, **Spiegelungen** an zu u orthogonalen Geraden und **zentrische Streckungen** mit einem positiven Streckungsfaktor und einem Streckungszentrum auf u bilden die nichteuklidische Ebene H auf sich ab und lassen nichteuklidische Abstände unverändert.

Problem: Es gibt keine Bewegung, die zwei Punkte einer N-Geraden vom Typ 1 auf zwei Punkte einer N-Geraden vom Typ 2 abbildet.

IV. Bewegungsaxiom
Wenn der Abstand zweier Punkte A und B positiv und gleich dem Abstand zweier Punkte C und D ist, dann gibt es genau zwei Bewegungen, die A auf C und B auf D abbilden. Eine Halbebene bezüglich der Geraden AB wird bei jeder dieser beiden Bewegungen auf eine andere Halbebene bezüglich CD abgebildet.

Satz P.1: Euklidische Verschiebungen entlang der Randgeraden u, **Spiegelungen** an zu u orthogonalen Geraden und **zentrische Streckungen** mit einem positiven Streckungsfaktor und einem Streckungszentrum auf u bilden die nichteuklidische Ebene H auf sich ab und lassen nichteuklidische Abstände unverändert.

Problem: Es gibt keine Bewegung, die zwei Punkte einer N-Geraden vom Typ 1 auf zwei Punkte einer N-Geraden vom Typ 2 abbildet.

Lösung: "Spiegelung an Kreisen"

Definition (Inversion): Es sei in einer (euklidischen) Ebene ein Kreis K mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r gegeben. Die Abbildung, die jedem Punkt A der Ebene einen Bildpunkt A' mit $A' \in AM$ zuordnet, wird als Inversion am Kreis K bezeichnet. Der Punkt M heißt Inversionspol und der Radius r Inversionsradius dieser Inversion. Dabei muss die Inversion die folgenden Eigenschaften erfüllen:

1. $|MA| \cdot |MA'| = r^2$
2. M, A und A' liegen auf einer Geraden

Definition (Inversion): Es sei in einer (euklidischen) Ebene ein Kreis K mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r gegeben. Die Abbildung, die jedem Punkt A der Ebene einen Bildpunkt A' mit $A' \in AM$ zuordnet, wird als Inversion am Kreis K bezeichnet. Der Punkt M heißt Inversionspol und der Radius r Inversionsradius dieser Inversion. Dabei muss die Inversion die folgenden Eigenschaften erfüllen:

1. $|MA| \cdot |MA'| = r^2$
2. M, A und A' liegen auf einer Geraden

Koordinatendarstellung einer Inversion:

Kartesisches Koordinatensystem mit Koordinatenursprung identisch dem Mittelpunkt M des Kreises K.

Definition (Inversion): Es sei in einer (euklidischen) Ebene ein Kreis K mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r gegeben. Die Abbildung, die jedem Punkt A der Ebene einen Bildpunkt A' mit $A' \in AM$ zuordnet, wird als Inversion am Kreis K bezeichnet. Der Punkt M heißt Inversionspol und der Radius r Inversionsradius dieser Inversion. Dabei muss die Inversion die folgenden Eigenschaften erfüllen:

1. $|MA| \cdot |MA'| = r^2$
2. M, A und A' liegen auf einer Geraden

Koordinatendarstellung einer Inversion:

Kartesisches Koordinatensystem mit Koordinatenursprung identisch dem Mittelpunkt M des Kreises K.

Aus $A' \in AM$ folgt, mit $A(x, y)$ und $A'(x', y')$, $\frac{y'}{x'} = \frac{y}{x}$ und nach der Definition der Inversion ist $|MA| \cdot |MA'| = \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{x'^2 + y'^2} = r^2$

Definition (Inversion): Es sei in einer (euklidischen) Ebene ein Kreis K mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r gegeben. Die Abbildung, die jedem Punkt A der Ebene einen Bildpunkt A' mit $A' \in AM$ zuordnet, wird als Inversion am Kreis K bezeichnet. Der Punkt M heißt Inversionspol und der Radius r Inversionsradius dieser Inversion. Dabei muss die Inversion die folgenden Eigenschaften erfüllen:

1. $|MA| \cdot |MA'| = r^2$
2. M, A und A' liegen auf einer Geraden

Koordinatendarstellung einer Inversion:

Kartesisches Koordinatensystem mit Koordinatenursprung identisch dem Mittelpunkt M des Kreises K.

Aus $A' \in AM$ folgt, mit $A(x, y)$ und $A'(x', y')$, $\frac{y'}{x'} = \frac{y}{x}$ und nach der

Definition der Inversion ist $|MA| \cdot |MA'| = \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{x'^2 + y'^2} = r^2$

Es ergibt sich: $x' = r^2 \cdot \frac{x}{x^2+y^2}$ und $y' = r^2 \cdot \frac{y}{x^2+y^2}$

Satz P.2: Bei einer beliebigen Inversion mit dem Inversionspol M werden
1. Geraden, die durch M verlaufen, auf sich selbst,

Satz P.2: Bei einer beliebigen Inversion mit dem Inversionspol M werden
1. Geraden, die durch M verlaufen, auf sich selbst,
2. Geraden, die nicht durch M verlaufen auf Kreise, die durch M verlaufen,

Satz P.2: Bei einer beliebigen Inversion mit dem Inversionspol M werden
1. Geraden, die durch M verlaufen, auf sich selbst,
2. Geraden, die nicht durch M verlaufen auf Kreise, die durch M verlaufen,
3. Kreise, die durch M verlaufen auf Geraden, die nicht durch M verlaufen

sowie

Satz P.2: Bei einer beliebigen Inversion mit dem Inversionspol M werden
1. Geraden, die durch M verlaufen, auf sich selbst,
2. Geraden, die nicht durch M verlaufen auf Kreise, die durch M verlaufen,
3. Kreise, die durch M verlaufen auf Geraden, die nicht durch M verlaufen sowie
4. Kreise die nicht durch M verlaufen auf ebensolche abgebildet.

Satz P.2: Bei einer beliebigen Inversion mit dem Inversionspol M werden
1. Geraden, die durch M verlaufen, auf sich selbst,
2. Geraden, die nicht durch M verlaufen auf Kreise, die durch M verlaufen,
3. Kreise, die durch M verlaufen auf Geraden, die nicht durch M verlaufen sowie
4. Kreise die nicht durch M verlaufen auf ebensolche abgebildet.

Satz P.3: Inversionen, deren Inversionspol auf u liegt, sind nichteuklidische Bewegungen im Poincaré - Modell.

Satz P.2: Bei einer beliebigen Inversion mit dem Inversionspol M werden
1. Geraden, die durch M verlaufen, auf sich selbst,
2. Geraden, die nicht durch M verlaufen auf Kreise, die durch M verlaufen,
3. Kreise, die durch M verlaufen auf Geraden, die nicht durch M verlaufen sowie
4. Kreise die nicht durch M verlaufen auf ebensolche abgebildet.

Satz P.3: Inversionen, deren Inversionspol auf u liegt, sind nichteuklidische Bewegungen im Poincaré - Modell.

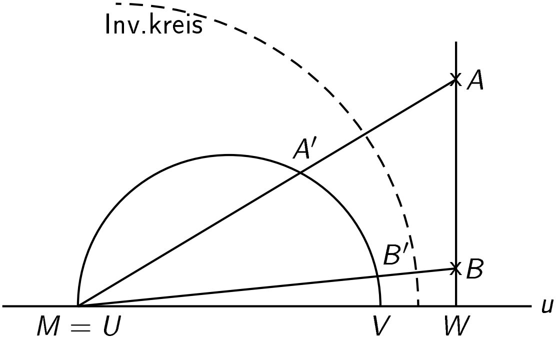
Zum Beweis sei eine Inversion gegeben, die die Punkte A und B, auf einer N-Geraden vom Typ 2 liegend, auf die Bildpunkte A' und B', auf einer N-Geraden vom Typ 1 liegend, abbildet.

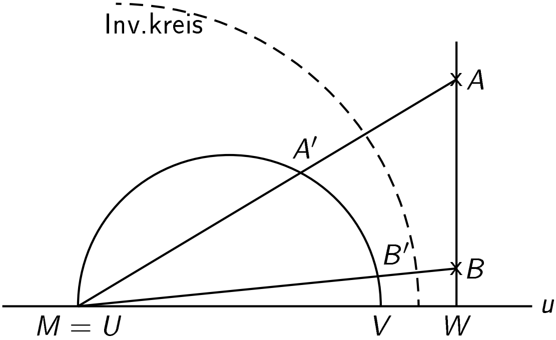
Satz P.2: Bei einer beliebigen Inversion mit dem Inversionspol M werden
1. Geraden, die durch M verlaufen, auf sich selbst,
2. Geraden, die nicht durch M verlaufen auf Kreise, die durch M verlaufen,
3. Kreise, die durch M verlaufen auf Geraden, die nicht durch M verlaufen sowie
4. Kreise die nicht durch M verlaufen auf ebensolche abgebildet.

Satz P.3: Inversionen, deren Inversionspol auf u liegt, sind nichteuklidische Bewegungen im Poincaré - Modell.

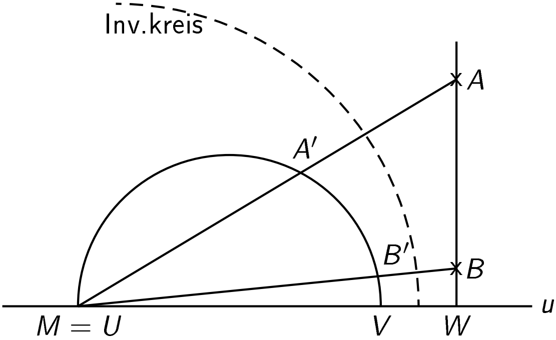
Zum Beweis sei eine Inversion gegeben, die die Punkte A und B, auf einer N-Geraden vom Typ 2 liegend, auf die Bildpunkte A' und B', auf einer N-Geraden vom Typ 1 liegend, abbildet.

Der Inversionspol M soll dabei dem uneigentlichen Punkt U der N-Gerade vom Typ 1 entsprechen.


Inv.kreis
A
A′
B′
B
u
M = U
V
W

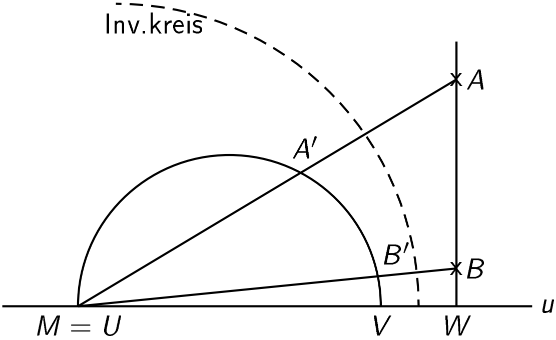


$$|A'B'|_N := \frac{1}{2}\left|ln\left(\frac{x'_A(x_V - x'_B)}{x'_B(x_V - x'_A)}\right)\right|$$



$$|A'B'|_N := \frac{1}{2}\left| ln\left(\frac{x'_A(x_V - x'_B)}{x'_B(x_V - x'_A)}\right)\right|$$

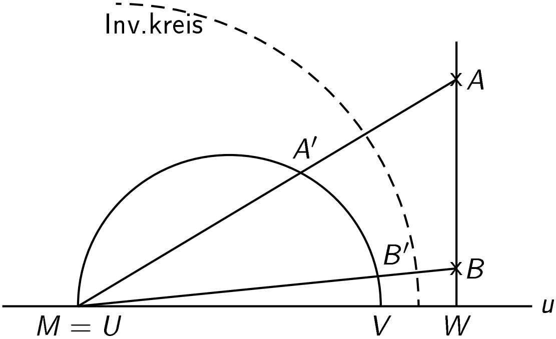
Für die Punkte A,B und W gilt $x_A = x_B = x_W =: x$.



$$|A'B'|_N := \frac{1}{2}\left|ln\left(\frac{x'_A(x_V - x'_B)}{x'_B(x_V - x'_A)}\right)\right|$$

Für die Punkte A,B und W gilt $x_A = x_B = x_W =: x$.

$x'_A = r^2 \cdot \frac{x}{x^2+y_A^2}$, $x'_B = r^2 \cdot \frac{x}{x^2+y_B^2}$ und $x_V = \frac{r^2}{x}$

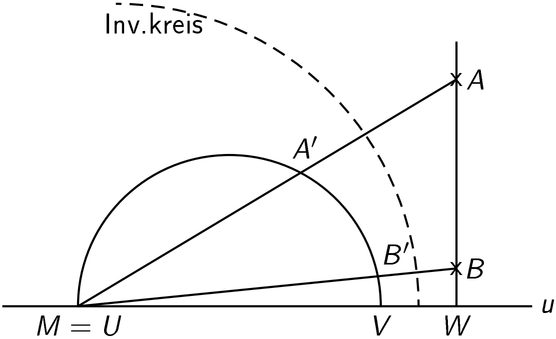


$|A'B'|_N := \frac{1}{2}\left|ln\left(\frac{x'_A(x_V - x'_B)}{x'_B(x_V - x'_A)}\right)\right|$

Für die Punkte A,B und W gilt $x_A = x_B = x_W =: x$.

$x'_A = r^2 \cdot \frac{x}{x^2+y_A^2}$, $x'_B = r^2 \cdot \frac{x}{x^2+y_B^2}$ und $x_V = \frac{r^2}{x}$

Aus obigen Beziehungen folgt: $\frac{x'_A(x_V - x'_B)}{x'_B(x_V - x'_A)} = \frac{y_B^2}{y_A^2}$



$|A'B'|_N := \frac{1}{2}\left|ln\left(\frac{x'_A(x_V - x'_B)}{x'_B(x_V - x'_A)}\right)\right|$

Für die Punkte A,B und W gilt $x_A = x_B = x_W =: x$.

$x'_A = r^2 \cdot \frac{x}{x^2+y_A^2}$, $x'_B = r^2 \cdot \frac{x}{x^2+y_B^2}$ und $x_V = \frac{r^2}{x}$

Aus obigen Beziehungen folgt: $\frac{x'_A(x_V - x'_B)}{x'_B(x_V - x'_A)} = \frac{y_B^2}{y_A^2}$

Durch Einsetzen folgt schließlich:

$|A'B'|_N = \frac{1}{2}\left|ln\left(\frac{y_B^2}{y_A^2}\right)\right| = \frac{1}{2}\left|ln\left(\left(\frac{y_B}{y_A}\right)^2\right)\right| = \frac{1}{2}\left|2ln\left(\frac{y_B}{y_A}\right)\right| = |AB|_N$

Folgende Bewegungen der nichteuklidischen Ebene H sind bekannt:

Folgende Bewegungen der nichteuklidischen Ebene H sind bekannt:

1. Verschiebungen entlang der Randgeraden u

Folgende Bewegungen der nichteuklidischen Ebene H sind bekannt:

1. Verschiebungen entlang der Randgeraden u
2. Spiegelungen an zu u senkrechten Geraden

Folgende Bewegungen der nichteuklidischen Ebene H sind bekannt:

1. Verschiebungen entlang der Randgeraden u
2. Spiegelungen an zu u senkrechten Geraden
3. Zentrische Streckungen mit einem positiven Streckungsfaktor und einem Streckungszentrum auf u

Folgende Bewegungen der nichteuklidischen Ebene H sind bekannt:

1. Verschiebungen entlang der Randgeraden u
2. Spiegelungen an zu u senkrechten Geraden
3. Zentrische Streckungen mit einem positiven Streckungsfaktor und einem Streckungszentrum auf u
4. Inversionen, deren Inversionspol auf u liegt

Die Winkelmessung und das Lobatschewski-Parallelenaxiom im Poincaré Modell

Die Winkelmessung und das Lobatschewski-Parallelenaxiom im Poincaré Modell

Die Winkelmessung erfolgt wie im Euklidischen.

Die Winkelmessung und das Lobatschewski-Parallelenaxiom im Poincaré Modell

Die Winkelmessung erfolgt wie im Euklidischen.

Nachweis des Parallelenaxioms: