Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Dr. Gabriele Link
Marius Graeber

Differentialgeometrie
für die Fachrichtung Geodäsie **Winter-Semester 2019/20**

Präsenzblatt 14 für die Übung am 06.02.2020 (nicht schriftlich abgeben!)

Präsenzaufgabe 1 (*Christoffelsymbole*)
Sei $U \subseteq \mathbb{R} \times (0, \infty)$, sei $x \colon U \to \mathbb{R}^3$ eine reguläre Parametrisierung, deren erste Fundamentalgrößen durch

$$(g_{ij}(u^1, u^2)) = \begin{pmatrix} (u^2)^{-2} & 0 \\ 0 & (u^2)^{-2} \end{pmatrix}$$

gegeben sind. Bestimmen Sie die Christoffelsymbole von x und weisen Sie nach, dass folgende Kurven für zulässige Intervalle I nach Bogenlänge parametrisierte Geodätische sind:

a) $c : I \to \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto x(0, e^t)$

b) $\tilde{c} : I \to \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto x(\tanh t, \operatorname{sech} t)$

Präsenzaufgabe 2 (*Innergeometrische Größen*)

a) Gegeben seien das Helikoid mit der Parametrisierung

$$x \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad (u^1, u^2) \mapsto (\cos u^1 \sinh u^2, \sin u^1 \sinh u^2, u^1)$$

und das Katenoid mit der Parametrisierung

$$\tilde{x} \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad (u^1, u^2) \mapsto (\cos u^1 \cosh u^2, \sin u^1 \cosh u^2, u^2).$$

Sei $c \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ t \mapsto x(u(t))$ eine Geodätische auf x. Zeigen Sie, dass $\tilde{c} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ t \mapsto \tilde{x}(u(t))$ eine Geodätische auf $\tilde{x}$ ist.

b) Sei $\alpha > 0$, sei $U := \mathbb{R} \times (0, \infty)$, sei

$$x \colon U \to \mathbb{R}^3, \quad (u^1, u^2) \mapsto (u^2 \cos u^1, u^2 \sin u^1, \alpha u^2)$$

eine Parametrisierung eines Kreiskegels, und sei $c \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Geodätische auf x. Zeigen Sie, dass die Anzahl der Selbstschnitte von c endlich ist und nur von α abhängt.

Präsenzaufgabe 3 (*Das Kartenproblem*)

a) Zeigen Sie, dass es nicht möglich ist, irgendeinen Teil T der Erdoberfläche auf eine Ebene E abzubilden, sodass alle Wege in T auf gleich lange Wege in E abgebildet werden.

(Es wird zur Vereinfachung angenommen, dass die Erdoberfläche eine perfekte Sphäre ist.)

Keine Abgabe. Die Aufgaben werden am 06.02.2020 in der Übung besprochen.