

Aufgabe 1 (*Noch mehr Krümmung und Torsion*)

(6 Punkte)

Sei die reguläre Kurve $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$t \mapsto \left(\sqrt{2} \cos(t), \sin(t) - t, \sin(t) + t \right).$$

- Berechnen Sie Krümmung und Torsion von x in jedem Punkt $x(t)$.
- Zeigen Sie, dass die Kurve x durch eine euklidische Bewegung auf eine Helix

$$y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto (r \cos(t), r \sin(t), ct)$$

für $r > 0$ und $c \geq 0$ abgebildet werden kann.

- Berechnen Sie die Größen r und c .

Aufgabe 2 (*Graphkurven*)

(6 Punkte)

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, sei $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Funktion und

$$x: I \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (t, f(t))$$

eine ebene Kurve.

- Berechnen Sie für alle $t \in I$ in Abhängigkeit von f den Tangentialvektor $T(t)$, den positiv orientierten Normalenvektor $N^+(t)$ und die geodätische Krümmung $\kappa_g(t)$ im Punkt $x(t)$.
- Bestimmen Sie T, N^+ und κ_g für die Fälle (i) $f(t) = t^3 - t$, (ii) $f(t) = \cosh(t)$.
- Die Evolute einer Kurve x ist die Kurve der Krümmungsmittelpunkte von x . Berechnen Sie für die in b) vorgegebenen Funktionen f die Evolute von x .

Aufgabe 3 (*Eine Kurve in verschiedenen Darstellungen*)

(6 Punkte)

Für eine Zahl $a > 0$ betrachten wir die Punkte $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, für die

$$x_1^2 = a^2 x_2^3$$

gilt. Diese Punktmenge beschreibt die Spur einer Kurve x .

- Skizzieren Sie die Kurve x für die Werte $a = 1, 2, 3$.
- Bestimmen Sie eine Menge $U \subseteq \mathbb{R}^2$ und eine Funktion $h: U \rightarrow \mathbb{R}$, sodass h eine implizite Kurvendarstellung eines nichtleeren Teils von x ist.
- Bestimmen Sie eine explizite Kurvendarstellung eines nichtleeren Teils von x . Warum gibt es keine explizite Kurvendarstellung für ganz x ?
- Bestimmen Sie eine Parametrisierung der Kurve x .

Abgabe am 25.11.2019 um 9:45 zu Beginn der Übung.