§2.3 Implizite Flächendarstellungen

Dr. Gabriele Link

Erinnerung

Satz von der impliziten Funktion

Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $I \subseteq \mathbb{R}$ offen, und $h : U \times I \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto h(x, y)$ eine k-mal stetig partiell differenzierbare Funktion. Gilt für $\hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_n) \in U$ und $\hat{y} \in I$

$$h(\hat{x}, \hat{y}) = 0 \qquad \text{und} \qquad h_y(\hat{x}, \hat{y}) = \frac{\partial h}{\partial y}(\hat{x}, \hat{y}) \neq 0,$$

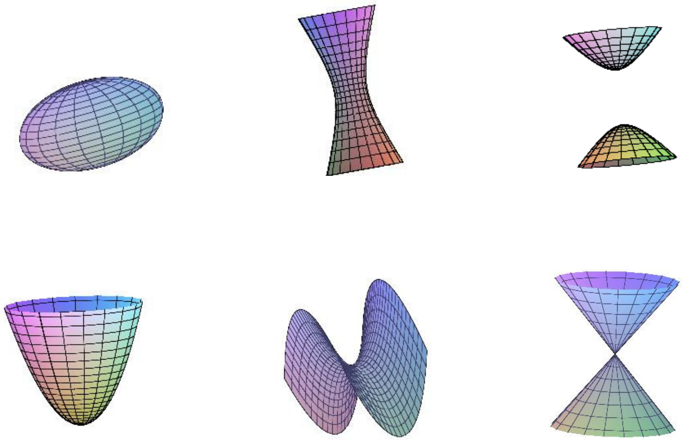
so existieren offene Umgebungen $W \subseteq U$ von $\hat{x}$, $J \subseteq I$ von $\hat{y}$ und genau eine k-mal stetig partiell differenzierbare Funktion $g\colon W \to J$

$$\text{mit} \quad g(\hat{x}) = \hat{y} \quad \text{und} \quad h(x, g(x)) = 0 \quad \text{für alle} \quad x \in W;$$

für jedes feste $x \in W$ ist $g(x) \in J$ die einzige Lösung in J mit $h(x, g(x)) = 0$. Weiter gilt für $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in W$

$$\operatorname{grad} g(x) = -\frac{1}{h_y(x, g(x))} \cdot \Big(h_{x_1}(x, g(x)), \ldots, h_{x_n}(x, g(x)) \Big)^\top.$$

§2.3 Implizite Flächendarstellungen



§2.3 Implizite Flächendarstellungen

Satz von der Umkehrfunktion

Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $F : U \to \mathbb{R}^m$ k-mal stetig partiell differenzierbar mit Jacobimatrix J_F, und $\hat{x} \in U$ mit $\operatorname{Rang}\big(J_F(\hat{x})\big) = n$. Dann existiert eine offene Umgebung $W \subseteq U$ von $\hat{x}$ sodass

$$F\big|_W : W \to F(W)$$

bijektiv ist. Die Umkehrabbildung $G = \big(F\big|_W\big)^{-1} : F(W) \to W$ ist k-mal stetig partiell differenzierbar, und im Fall $m = n$ gilt

$$J_G(F(x)) = \big(J_F(x)\big)^{-1}, \; x \in W.$$

Bemerkungen

- Notwendig ist also insbesondere die Bedingung $m \geq n$.
- Es muss keine **globale** Umkehrfunktion existieren.