Hausaufgaben Blatt 11

Aufgabe 1

a) Eine Kurve c ist regulär, wenn $c'(t) \neq 0 \ \forall t \in \mathbb{R}$ ist.

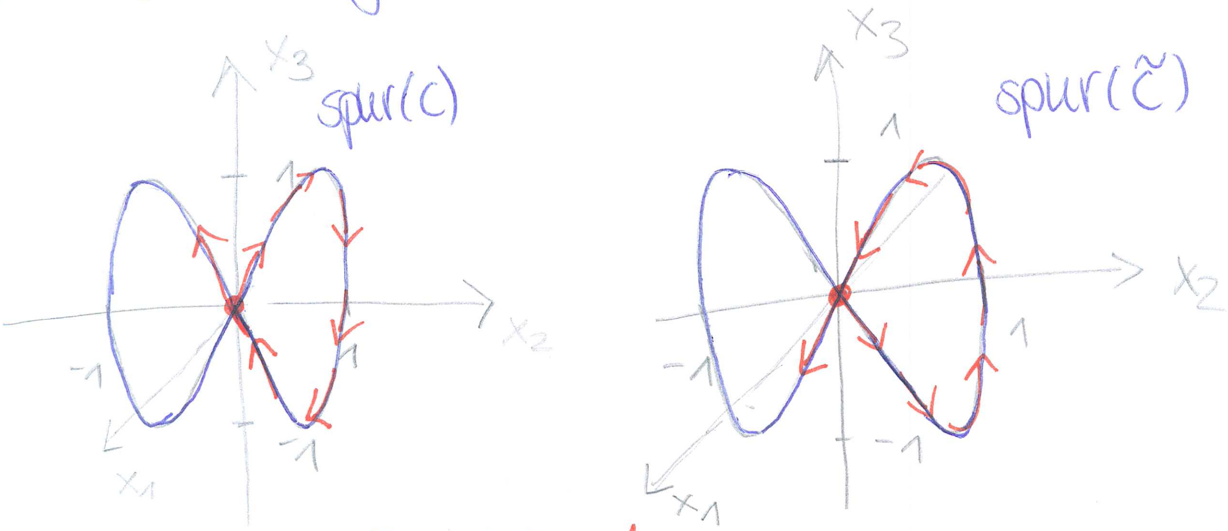
Es gilt: $c'(t) = (0, \cos(t), 2\cos(2t)) \neq 0 \ \forall t \in \mathbb{R}$

da: $\cos(t) = 0 \Rightarrow \cos(2t) \neq 0$ und $\cos(2t) = 0 \Rightarrow \cos(t) \neq 0$

gilt. Mit der gleichen Begründung ist

$\tilde{c}'(t) = (0, \cos(t), -2\cos(2t)) \neq 0$, somit sind

c und $\tilde{c}$ regulär.



Durchlaufsinn

b) Nach der Vorlesung ist eine Drehfläche mit regulärer Profilkurve regulär parametrisiert, wenn die Kurve die Drehachse nicht schneidet (Satz 5.15.) Dies ist hier der Fall für $a > 1$. Somit ist für $a > 1$

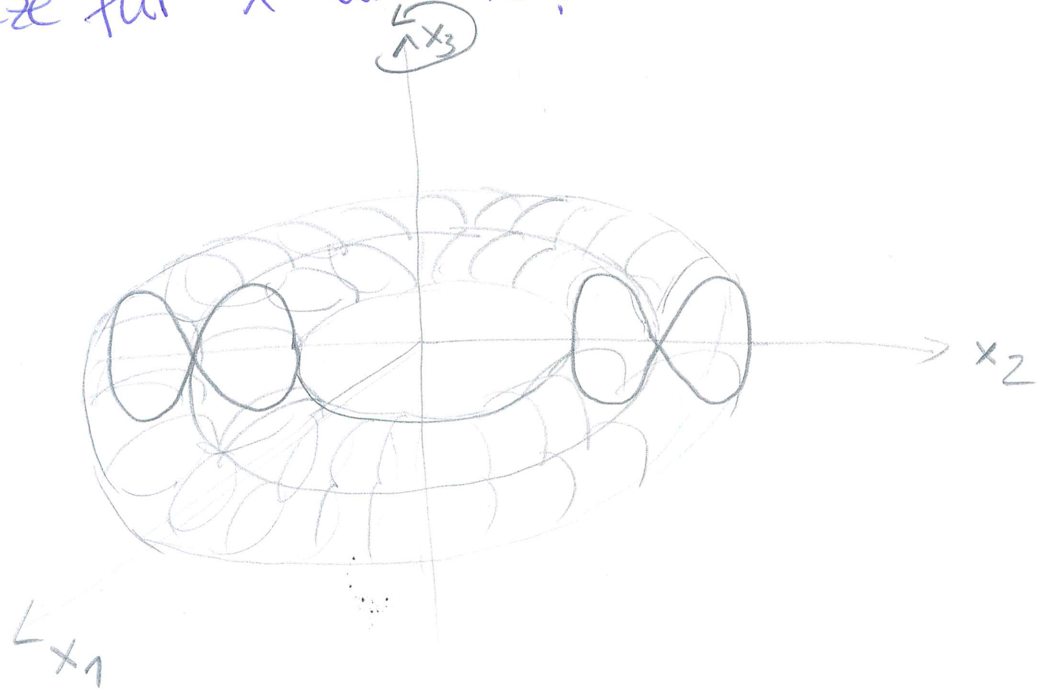
$x : [0,2\pi) \times \mathbb{R} =: U,\ (u^1,u^2) \mapsto ((\sin(u^2)+a)\cdot\cos(u^1),$
$(\sin(u^2)+a)\sin(u^1), \sin(2u^2))$

eine reg. Param. einer Drehfläche mit Profilkurve c und

$\tilde{x} : [0,2\pi) \times \mathbb{R} =: \tilde{U},\ (u^1,u^2) \mapsto ((\sin(u^2)+a)\cos(u^1),$
$(\sin(u^2)+a)\sin(u^1), -\sin(2u^2))$

eine reg. Param. einer Drehfläche mit Profilkurve $\tilde{c}$.

Skizze für x und $\tilde{x}$:



Ebenfalls aus Satz 5.15. folgt, dass die Selbstdurchdringung von c ($\tilde{c}$) bzw x ($\tilde{x}$) keine Auswirkung auf die Regularität hat.

c) Um zu zeigen, dass $Spur(x) = Spur(\tilde{x})$ ist, zeigen wir zunächst, dass

$$spur(c) = spur(\tilde{c}) \text{ gilt.}$$

Dazu nutzen wir die folgenden Regeln für sin:

(i) $\sin(x) = -\sin(2\pi - x)$

(ii) $\sin(x) = \sin(\pi - x)$

für alle $x \in \mathbb{R}$

Damit gilt:

$$\tilde{c}(t) = (\sin(t), -\sin(2t))$$

$$\overset{(i)}{=} (\sin(t), \sin(2\pi - 2t))$$

$$= (\sin(t), \sin(2(\pi - t)))$$

$$\overset{(ii)}{=} (\sin(\pi - t), \sin(2(\pi - t)))$$

$$= c(\pi - t)$$

Somit ist $Spur(\tilde{c}) = \{\tilde{c}(t) \mid t \in \mathbb{R}\}$

$$= \{c(\pi - t) \mid t \in \mathbb{R}\} = spur(c).$$

Da $spur(\tilde{c}) = spur(c)$ gilt und x bzw. $\tilde{x}$ Drehflächen mit Profilkurven mit der gleichen Spur sind, gilt auch $Spur(x) = Spur(\tilde{x})$.

a) Wir zeigen, dass $\tilde{x}$ eine Ump. von x ist.

Dazu müssen wir eine Parametertransf.

$u: \tilde{\mathcal{U}} \to \mathcal{U}$ finden,

sodass gilt:

i) $\tilde{x}(\tilde{u}) = x(u(\tilde{u}))$ für alle $\tilde{u} \in \tilde{\mathcal{U}}$

ii) $\det J_u(\tilde{u}) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^1}(\tilde{u}) & \frac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^2}(\tilde{u}) \\ \frac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^1}(\tilde{u}) & \frac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^2}(\tilde{u}) \end{pmatrix} \neq 0$

für alle $\tilde{u} \in \tilde{\mathcal{U}}$

Also ist der erste Schritt, eine solche Ump. $u: \tilde{\mathcal{U}} \to \mathcal{U}$ zu finden. Dazu schreiben wir nochmal auf, was wir über x und $\tilde{x}$ wissen und verwenden dann die Eigenschaft i), um $u: \tilde{\mathcal{U}} \to \mathcal{U}$ zu finden:

- $x(u) = (c_2(u^2)\cos(u^1), c_2(u^2)\sin(u^1), c_3(u^2))$
- $\tilde{x}(\tilde{u}) = (\tilde{c}_2(\tilde{u}^2)\cos(\tilde{u}^1), \tilde{c}_2(\tilde{u}^2)\sin(\tilde{u}^1), c_3(\tilde{u}^2))$

$\tilde{c}(t) = c(\pi - t)$

$\overset{\text{Teil c)}}{=} (c_2(\pi-\tilde{u}^2)\cos(\tilde{u}^1), c_2(\pi-\tilde{u}^2)\sin(\tilde{u}^1), c_3(\pi-\tilde{u}^2))$

Jetzt können wir die Koordinatenfunkt. von x und $\tilde{x}$ vergleichen. Damit i) erfüllt ist, muss

$$x_1(u(\tilde{u})) = \tilde{x}_1(\tilde{u}),\ x_2(u(\tilde{u})) = \tilde{x}_2(\tilde{u}),$$
$$x_3(u(\tilde{u})) = \tilde{x}_3(\tilde{u})$$ gelten:

erste Fkt: $c_2(u^2(\tilde{u}))\cdot\cos(u^1(\tilde{u})) = c_2(\pi-\tilde{u}^2)\cos(\tilde{u}^1)$

Aus der ersten Koord.fkt. haben wir einen Kandidaten für die Ump. gefunden. Wir definieren jetzt

$$u: \tilde{U} \to U,\ \tilde{u} \mapsto (\underset{u^1(\tilde{u})}{\underset{\shortparallel}{\tilde{u}^1}},\ \underset{u^2(\tilde{u})}{\underset{\shortparallel}{\pi-\tilde{u}^2}})$$

und zeigen, dass i) und ii) erfüllt sind:

zu i): Es gilt für alle $\tilde{u}\in\tilde{U}$:

$$\tilde{x}(\tilde{u}) = (\tilde{c}_2(\tilde{u}^2)\cos(\tilde{u}^1),\ \tilde{c}_2(\tilde{u}^2)\sin(\tilde{u}^1),\ c_3(\tilde{u}^2))$$

siehe vorne $= (c_2(\pi-\tilde{u}^2)\cos(\tilde{u}^1),\ c_2(\pi-\tilde{u}^2)\sin(\tilde{u}^1),\ c_3(\pi-\tilde{u}^2))$

$$= (c_2(u^2(\tilde{u}))\cos(u^1(\tilde{u})),\ c_2(u^2(\tilde{u}))\sin(u^1(\tilde{u})),\ c_3(u^2(\tilde{u})))$$

$$= x(u(\tilde{u})).$$

zu ii): Es ist

$$\det J_u(\tilde{u}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -1 \neq 0 \quad \forall \tilde{u} \in \tilde{U}.$$

Also ist u orientierungsumkehrend und $\tilde{x}$ ist eine Umparametrisierung von x. //

Aufgabe 2

a) Wir gehen so vor wie in Afg. 1d), indem wir zunächst eine mögliche Parametertransf. $u: \tilde{U} \to U$ suchen und anschließend überprüfen, ob die Eigensch. einer Ump. erfüllt sind.

i) $\tilde{x}_1(\tilde{u}) = \tilde{u}^1 \cdot \cos(\tilde{u}^2)$, $x_1(u) = u^2 \cdot \cos(u^1)$

Definiere $u: \tilde{U} \to U$, $\tilde{u} \mapsto (\tilde{u}^2, \tilde{u}^1)$.

Dann ist:

zu i) $\tilde{x}(\tilde{u}) = (\tilde{u}^1 \cdot \cos(\tilde{u}^2), \tilde{u}^1 \cdot \sin(\tilde{u}^2), a\tilde{u}^2)$

$= (u^2(\tilde{u}) \cos(u^1(\tilde{u})), u^2(\tilde{u}) \sin(u^1(\tilde{u})), a \cdot u^1(\tilde{u}))$

$= x(u(\tilde{u}))$.

zu ii) Es ist $\det J_u(\tilde{u}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \underset{<0}{-1} \neq 0 \quad \forall \tilde{u} \in \tilde{U}$

Also sind i), ii) erfüllt und somit ist $\tilde{x}$ eine orientierungsumkehrende Ump. von x.
($\det J_u(\tilde{u}) < 0$)

ii) Damit $\tilde{x}_1(\tilde{u}) = x_1(u(\tilde{u}))$ sein kann, muss u als $u: \tilde{U} \to U$,

$$\tilde{u} \mapsto (\tilde{u}^1 + \tilde{u}^2, \tilde{u}^1 + \tilde{u}^2)$$

definiert werden. Dann ist aber die Eigenschaft ii) verletzt, denn

$$\det J_u(\tilde{u}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 0 \quad \forall \tilde{u} \in \tilde{U},$$

also ist u keine Parametertr. und somit ist $\tilde{x}$ keine Ump. von x.

iii) Damit $\tilde{x}_3(\tilde{u}) = x_3(u(\tilde{u}))$ ist, muss

$$a u^1(\tilde{u}) = a\tilde{u}^1 + \tilde{u}^2, \text{ also}$$

$(a>0)$ $\quad u^1(\tilde{u}) = \tilde{u}^1 + \frac{\tilde{u}^2}{a}$ gelten.

Aus $\tilde{x}_1(\tilde{u}) = x_1(u(\tilde{u}))$ folgt

$$u^2(\tilde{u}) = a\tilde{u}^2.$$

Also wird u als $u: \tilde{U} \to U$,

$$\tilde{u} \mapsto \left(\tilde{u}^1 + \frac{\tilde{u}^2}{a}, a\tilde{u}^2\right)$$ definiert.

Damit ist:

zu i): $\tilde{x}(\tilde{u}) = \left(a\tilde{u}^2 \cos\left(\tilde{u}^1 + \frac{\tilde{u}^2}{a}\right), a\tilde{u}^2 \sin\left(\tilde{u}^1 + \frac{\tilde{u}^2}{a}\right), \underbrace{a\tilde{u}^1 + \tilde{u}^2}_{= a\left(u^1 + \frac{\tilde{u}^2}{a}\right)}\right)$

$$= \left(u^2(\tilde{u}) \cos(u^1(\tilde{u})), u^2(\tilde{u}) \cdot \sin(u^1(\tilde{u})), a \cdot u^1(\tilde{u})\right) = x(u(\tilde{u})).$$

zu ii) $\det Ju(\tilde{u}) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{a} \\ 0 & a \end{pmatrix} = a > 0$ (nach Vor.), also $\neq 0$

Damit ist $\tilde{x}$ eine orient. erhaltende Umparametrisierung von x.

b) Das Gaußsche begleitende Dreibein besteht aus den drei Vektoren

$$x_{u^1}(u_0), x_{u^2}(u_0), n(u_0) = \frac{x_{u^1}(u_0) \times x_{u^2}(u_0)}{\| x_{u^1}(u_0) \times x_{u^2}(u_0) \|}$$

Richtungsableitungen entlang Param.lin. Flächennorm.vektor

3-Bein für X:

- $X_{u^1}(u_0) = (-u^2 \cdot \sin(u^1), u^2 \cdot \cos(u^1), a)$
- $X_{u^2}(u_0) = (\cos(u^1), \sin(u^1), 0)$
- $X_{u^1}(u_0) \times X_{u^2}(u_0) = (-a \cdot \sin(u^1), a\cos(u^1), -u^2)$

- $\|X_{u^1}(u_0) \times X_{u^2}(u_0)\|^2 = a^2 \cdot \sin(u^1)^2 + a^2 \cdot \cos(u^1)^2 + (u^2)^2$

$$= a^2 + (u^2)^2$$

$\rightsquigarrow$ $n(u_0) = \frac{1}{\sqrt{a^2+(u^2)^2}} (-a \cdot \sin(u^1), a\cos(u^1), -u^2)$

3-Bein

3-Bein für $\tilde{X}$ aus i)

- $\tilde{X}_{\tilde{u}^1}(\tilde{u}_0) = (\cos(\tilde{u}^2), \sin(\tilde{u}^2), 0)$
- $\tilde{X}_{\tilde{u}^2}(\tilde{u}_0) = (-\tilde{u}^1 \sin(\tilde{u}^2), \tilde{u}^1 \cos(\tilde{u}^2), a)$

- $\tilde{X}_{\tilde{u}^1}(\tilde{u}_0) \times \tilde{X}_{\tilde{u}^2}(\tilde{u}_0) = (a \cdot \sin(\tilde{u}^2), -a \cdot \cos(\tilde{u}^2), \tilde{u}^1)$

- $\| \tilde{X}_{\tilde{u}^1}(\tilde{u}_0) \times \tilde{X}_{\tilde{u}^2}(\tilde{u}_0) \|^2 = a^2 \sin(\tilde{u}^2)^2 + a^2 \cos(\tilde{u}^2)^2 + (\tilde{u}^1)^2$

$$= a^2 + (\tilde{u}^1)^2$$

$$\Rightarrow \tilde{n}(\tilde{u}_0) = \frac{1}{\sqrt{a^2 + (\tilde{u}^1)^2}} (a \cdot \sin(\tilde{u}^2), -a \cdot \cos(\tilde{u}^2), \tilde{u}^1)$$

3-Bein

Für die Flächennormalenvektoren n von x und $\tilde{n}$ von $\tilde{x}$ gilt:

Beh: $\tilde{n}(\tilde{u}_0) = -n(u(\tilde{u}_0))$, wobei

$u: \tilde{U} \to U,\ \tilde{u} \mapsto (\tilde{u}^2, \tilde{u}^1)$ die Parametertr. aus Teil a) ist.

Bew: $n(u(\tilde{u}_0)) = \frac{1}{\sqrt{a^2 + (\tilde{u}^1)^2}} (-a \cdot \sin(\tilde{u}^2), a \cdot \cos(\tilde{u}^2), -\tilde{u}^1)$

$$= -\tilde{n}(\tilde{u}_0) \quad //$$

Bem: die Änderung des Vorzeichens liegt daran, dass u orient. umkehrend ist.