

Differentialgeometrie für die Fachrichtung Geodäsie

Übungsblatt 8

Hausaufgaben

Aufgabe 1 (Wendelfläche)

Für $a > 0$ sei das parametrisierte Flächenstück $x: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ durch

$$u = (u^1, u^2) \mapsto (u^2 \cos(u^1), u^2 \sin(u^1), au^1)$$

gegeben.

- Zeigen Sie, dass x regulär ist.
- Zeigen Sie, dass x eine Regelfläche ist.
- Berechnen Sie die Parameterlinien c_{u^1} und c_{u^2} von x .
- Berechnen Sie die Krümmung von c_{u^1} und c_{u^2} und die Torsion von c_{u^1} . Um welche Kurven handelt es sich hier und warum?

Aufgabe 2 (Flächenstücke und Tangentialebene)

Für $a \geq 0$ sei das parametrisierte Flächenstück $x: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ durch

$$u = (u^1, u^2) \mapsto ((a + \cos(u^2)) \cos(u^1), (a + \cos(u^2)) \sin(u^1), \sin(u^2))$$

gegeben.

- Welche Punkte von x sind (in Abhängigkeit von a) regulär? Für welche a sind alle Punkte von x regulär?
- Skizzieren sie die Flächenstücke x für die Parameter $a = 0, 1, 2$.
- Sei nun $a = 2$. Bestimmen Sie die Parameterlinien von x und überprüfen Sie, ob es sich um ebene Kurven handelt oder nicht.
- Bestimmen Sie die Tangentialebene von x für $a = 2$ im Punkt $x(0, \pi/2)$.

Präsenzaufgaben

Aufgabe 3 (Sattelfläche)

Das parametrisierte Flächenstück $x: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, das durch

$$u = (u^1, u^2) \mapsto (u^1, u^2, u^1 \cdot u^2)$$

gegeben ist, heißt *Sattelfläche*.

- Zeigen Sie, dass x regulär in allen Punkten $x(u)$ ist. Ein regulär parametrisiertes Flächenstück nennen wir *Fläche*.
- Bestimmen Sie die Parameterlinien c_{u^1} und c_{u^2} und berechnen Sie deren Krümmungen. Um welche Kurven handelt es sich?
- Bestimmen Sie die Tangentialebene von x in jedem Punkt $x(u)$.
- Was muss überprüft werden, um zu zeigen, dass x eine Regelfläche ist? Zeigen Sie, dass x eine Regelfläche ist.
- Bestimmen Sie eine explizite Darstellung von x , in dem Sie eine glatte Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ finden, so dass

$$(u^1, u^2) \mapsto (u^1, u^2, f(u^1, u^2))$$

eine Parametrisierung der Fläche x ist.